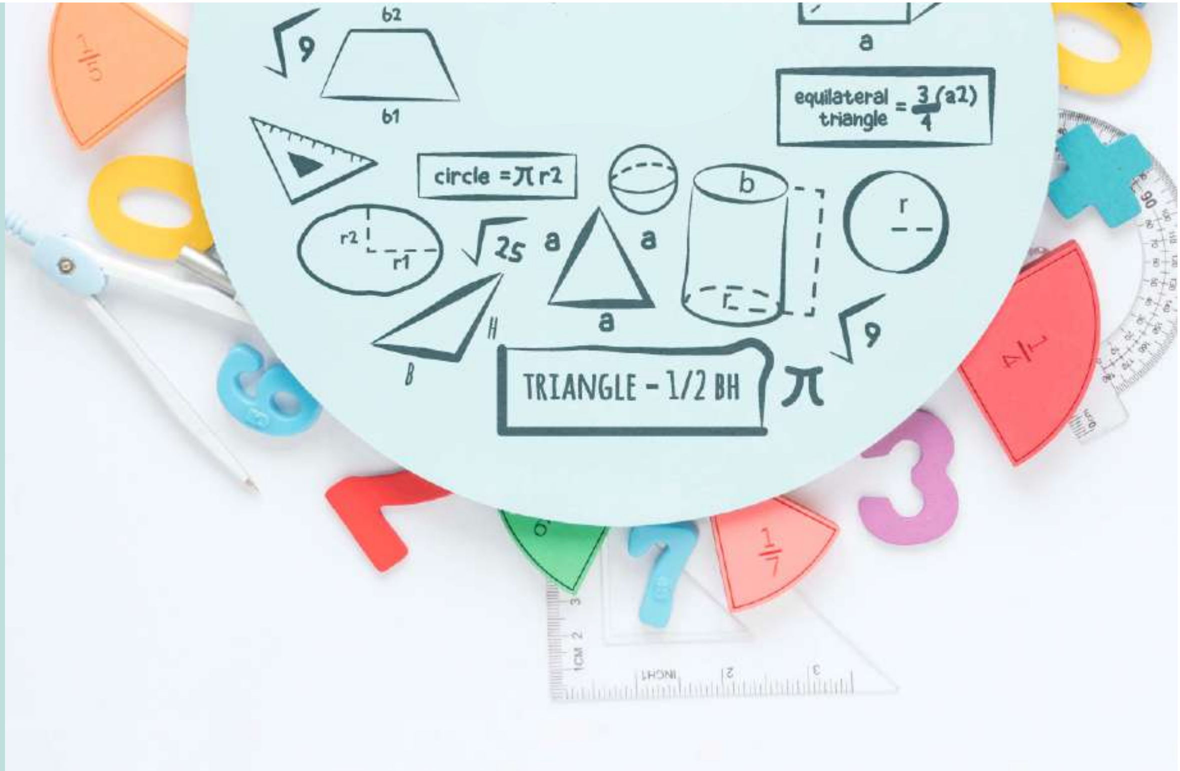
MATEMATIKA DASAR

Matematika merupakan ilmu dasar yang sangat diperlukan untuk landasan bagi teknologi dan pengetahuan modern. Apakah matematika itu?. tentu tidak dapat dengan mudah dijawab dengan satu kalimat begitu saja. Berbagai pendapat muncul tentang pengertian matematika tersebut, dipandang dari pengetahuan dan pengalaman masing-masing yang berbeda. Para pakar matematika memberi definisi atau pengertian tentang matematika menurut sudut pandang masing-masing. Ada yang mengatakan bahwa matematika adalah bahasa simbol; matematika merupakan bahasa numerik; matematika adalah bahasa yang dapat menghilangkan sifat kabur, majemuk, dan emosional; matematika adalah metode berpikir logis; matematika adalah sarana berpikir; matematika adalah logika pada masa dewasa; matematika adalah ratunya ilmu dan sekaligus menjadi pelayannya; matematika adalah sains mengenai kuantitas dan besaran; matematika adalah sains yang bekerja menarik kesimpulan-kesimpulan yang perlu; matematika adalah sains formal yang murni; matematika adalah sains yang memanipulasi simbol; matematika adalah ilmu tentang bilangan dan ruang; matematika adalah ilmu yang memmpelajari hubungan pola, bentuk, dan struktur; matematika adalah ilmu yang abstrak dan deduktif, matematika adalah aktivitas manusia. Bagian yang dijabarkan dalam buku ini diantaranya : ***Pemecahan Masalah Matematika, Penalaran Matematika, Logika, Himpunan, Relasi Dan Fungsi, Persamaan Dan Pertidaksamaan, Trigonometri***

BADAN PENERBIT UNM
Alamat: Gedung Perpustakaan Lt.1 Kampus UNM Gunung Sari Baru
Jl. Raya Pendidikan 90222, Kota Makassar, Sulawesi Selatan
Telp/WA +62 852-5522-0015 +62 853-9750-1407 +62 822-3292-8654
Email: badanpenerbit@unm.ac.id | badanpenerbitunm@gmail.com
website: badanpenerbit.unm.ac.id

ISBN 978-623-387-008-5

MATEMATIKA DASAR
Rahmawati Patta, Latri, Bahar
Badan Penerbit UNM



•Rahmawati Patta •Latri •Bahar

MATEMATIKA DASAR

Badan Penerbit UNM

MATEMATIKA DASAR

Rahmawati Patta
Latri
Bahar

Reviewer: *Erma Suryani Sahabuddin*

Badan Penerbit UNM

Matematika Dasar

Cetakan pertama, Oktober 2021

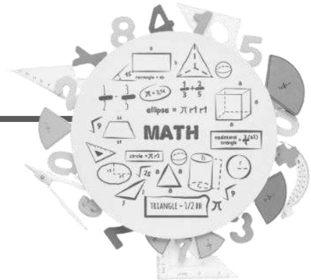
Diterbitkan oleh **Badan Penerbit UNM**
Gedung Perpustakaan Lt. 1 Kampus UNM Gunungsari
Jl. Raya Pendidikan 90222
Tlp./Fax. (0411) 865677 / (0411) 861377
Email: badanpenerbit@unm.ac.id &
badanpenerbitunm@gmail.com
Website: badanpenerbit.unm.ac.id

Layouter & Desain Cover: Muhammad Rafli Pradana, S.Ds.
(Badan Penerbit UNM)

ANGGOTA IKAPI No. 011/SSL/2010
ANGGOTA APPTI No. 006.063.1.10.2018

v, 183 hlm; 23 cm

ISBN 978-623-387-008-5



KATA PENGANTAR

Puji syukur dipanjatkan kepada Illahi Rabbi Sang Penguasa Jagat Raya, yang menciptakan segalanya dan mengatur kehidupan makhluknya yang begitu sistematis sehingga apapun yang terjadi di semua Alam tidak ada yang secara kebetulan. Marilah kita sejenak mengirimkan doa kepada para nabi Allah yang menyampaikan kebenaran Tauhid. Kemudian terkhusus buat Rasulullah Muhammad saw marilah kita bersalawat kepadanya semoga kita termasuk orang yang mendapatkan syafaat di kehidupan selanjutnya.

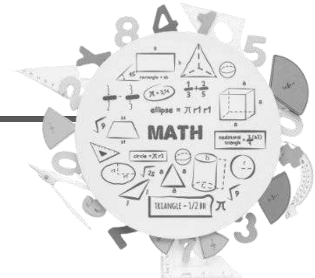
”Apakah matematika itu?” tidak dapat dengan mudah dijawab dengan satu kalimat begitu saja. Berbagai pendapat muncul tentang pengertian matematika tersebut, dipandang dari pengetahuan dan pengalaman masing-masing yang berbeda. Para pakar matematika memberi definisi atau pengertian tentang matematika menurut sudut pandang masing-masing. Ada yang mengatakan bahwa matematika adalah bahasa simbol; matematika merupakan bahasa numerik; matematika adalah bahasa yang dapat menghilangkan sifat kabur, majemuk, dan emosional; matematika adalah metode berpikir logis; matematika adalah sarana berpikir; matematika adalah logika pada masa dewasa; matematika adalah ratunya ilmu dan sekaligus menjadi pelayannya; matematika adalah sains mengenai kuantitas dan besaran; matematika adalah sains yang bekerja menarik kesimpulan-kesimpulan yang perlu; matematika adalah sains formal yang murni; matematika adalah sains yang memanipulasi simbol; matematika adalah ilmu tentang bilangan dan ruang; matematika adalah ilmu yang memmpelajari hubungan pola, bentuk, dan struktur; matematika adalah ilmu yang abstrak dan deduktif, matematika adalah aktivitas manusia.

Mahasiswa yang sedang menuntuk ilmu pengetahuan di perguruan tinggi harus mempelajari matematika, paling tidak matematika dasar. Untuk membantu mahasiswa maka kami berusaha menyusun bahan ajar ini, terutama digunakan dalam mata kuliah pengantar dasar matematika pada semester dua.

Penyusun menyadari bahwa baik isi maupun cara penyusunan buku ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, segala saran, tegur sapa, dan kritik yang membangun sangat penyusun harapkan. Demikianlah, mudah-mudahan buku ini bergunan dan dapat dimanfaatkan sebaik-baiknya.

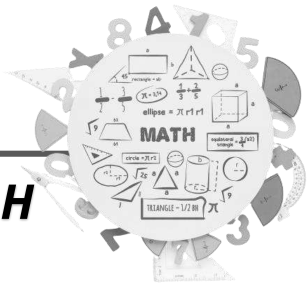
Makassar, September 2020

Penulis



DAFTAR ISI

BAB 1



PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

PENDAHULUAN

Perkembangan Ilmu Pengetahuan dan Teknologi yang semakin cepat menuntut setiap manusia untuk mampu meyesuaikan diri guna mengikuti perubahan-perubahan yang terjadi, serta mampu memecahkan masalah yang dihadapinya secara cermat, tepat dan kreatif. Tujuan belajar matematika yang tertecantum dalam kurikulum mata pelajaran matematika di semua jenjang pendidikan, yaitu mengarah kepada kemampuan siswa pada pemecahan masalah yang dihidapi dalam kehidupan sehari-hari dengan menjadikan siswa kreatif, dam inovatif.

Masalah merupakan bagian yang tak terpisahkan dari kehidupan manusia. Setiap manusia hidup selalu berhadapan dengan masalah. Yang berbeda adalah bagaimana mereka menyikapi masalah itu. Ada yang menghindar dan ada yang berusaha mencari pemecahan dari masalah itu. Orang yang ingin selalu memecahkan masalah yang dihadapinya adalah lebih baik dari pada orang yang selalu menghindar dari masalah yang dihadapi, karena masalah itu tidak akan hilang jika tidak diselesaikan.

A. PENGERTIAN MASALAH

Suatu pertanyaan akan menjadi masalah, hanya jika pertanyaan itu menunjukkan adanya suatu tantangan (*challenge)* yang tidak dapat dipecahkan oleh suatu prosedur rutin (*routine procedure)* yang sudah diketahui si pelaku, seperti yang dinyatakan Cooney, et al. (1975: 242) berikut: "*... for a question to be a problem, it must present a challenge that cannot be resolved by some routine procedure known to the student."*

Bell (1978) mengemukakan bahwa suatu situasi dikatakan masalah bagi seseorang jika ia menyadari keberadan situasi tersebut, mengakui bahwa situasi tersebut memerlukan tindakan dan tidak dengan segera dapat menemukan pemecahannya.

Hudoyo (1990) lebih tertarik melihat masalah, dalam kaitannya dengan prosedur yang digunakan seseorang untuk menyelesaikannya berdasarkan kapasitas kemampuan yang dimilikinya. Selanjutnya ditegaskan bahwa seseorang mungkin dapat menyelesaikan suatu masalah dengan prosedur rutin, namun orang lain dengan cara tidak rutin.

Baroody (1993) menyatakan bahwa "masalah" dalam matematika adalah suatu soal yang di dalamnya tidak terdapat prosedur rutin yang dengan cepat dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah dimaksud. Masalah dapat juga berarti suatu tugas yang apabila kita membacanya, melihatnya atau mendengarnya pada waktu tertentu, dan kita tidak mampu untuk segera menyelesaikannya pada saat itu juga (Gough dalam Coffey, Kolsch dan Mackinlay, 1995).

McGivney dan DeFranco (1995) memahami bahwa setiap masalah dalam pembelajaran matematika mengandung 3 unsur penting, yaitu : (1) informasi, (2) operasi dan (3) tujuan.

Menurut National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000: 24) masalah mempunyai ciri: *(1) nonroutine, (2) long, (3) predicated on the high-level use of fact, concepts and skills, (4) cast in context and (5) "focused on the students" abilities to develop and use strategies to solve a problem*.

Menurut Charles (dalam Kaur Berinderjeet, 2008) suatu masalah adalah tugas dimana : (1) seseorang ada keinginan untuk menghadapi serta ada keinginan untuk menemukan solusi, (2) seseorang tidak mempunyai prosedur yang siap digunakan untuk menemukan solusi, dan (3) seseorang harus berusaha untuk menemukan solusi. Dari tiga komponen tugas pada diri seseorang tersebut mengindikasi-kan pentingnya masalah. Pertama, suatu keinginan atau kebutuhan pemecah masalah *(solver)* untuk menemukan solusi. Kedua, solusi tersebut tidak bisa diperoleh secara langsung atau tiba-tiba dengan hanya berdasar pada pengetahuan. Ketiga, pemecah masalah *(solver)* harus membuat suatu usaha nyata untuk tiba pada suatu solusinya.

Berdasarkan beberapa pengertian tentang masalah *(problem)* yang telah dikemukakan di atas, maka dapat dikatakan bahwa suatu kondisi tertentu merupakan suatu masalah bagi seseorang, tetapi belum tentu merupakan masalah bagi orang lain. Dengan demikian, masalah merupakan suatu kondisi yang relatif..

Suatu pertanyaan yang merupakan permasalahan bagi siswa SD, mungkin bukan permasalahan bagi Anda sebagai mahasiswa, sebab bagi siswa SD untuk menjawab pertanyaan tersebut memerlukan proses penalaran yang rumit, sedangkan bagi Anda untuk menjawab pertanyaan tersebut memerlukan proses penalaran yang rutin. Sebaliknya, apabila suatu pertanyaan merupakan permasalahan bagi Anda, apakah pertanyaan tersebut merupakan permasalahan bagi siswa SD? Tentu saja pertanyaan tersebut bagi siswa SD bukan merupakan permasalahan, karena siswa SD memang belum siap untuk mampu menjawab permasalahan Anda. Demikian juga permasalahan yang dihadapi oleh ilmuwan, misalnya ahli astronomi, tentunya bagi kita sebagai orang yang tidak mempelajari permasalahan yang berkaitan dengan keastronomian, bukan merupakan masalah. Masalah yang sering dialami oleh sebagian besar siswa SD

Contoh 1.1
Berapakah jumlah dari 1 + 2 + 3 + . . . + 1000?

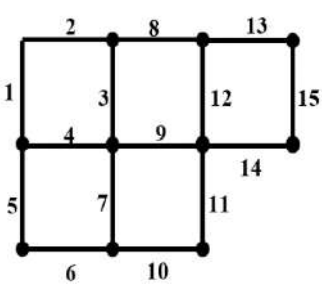
Bagi siswa SD pertanyaan tersebut merupakan permasalahan, karena siswa SD tidak mempunyai aturan/hukum tertentu yang segera dapat dipergunakan untuk menemukan jawaban pertanyaan tersebut. Hal ini berarti pertanyaan tersebut tidak dapat dijawab dengan prosedur rutin, pertanyaan tersebut meskipun dapat dimengerti, tetapi pertanyaan tersebut merupakan tantangan untuk dijawab yang sifatnya individu (tingkat berfikir siswa) dan pengetahuan yang telah dimiliki, serta bergantung pada waktu.

Contoh 1.2:
Menghitung suatu percobaan tentang melambungkan sebuah dadu yang homogen oleh 25 siswa kelas VI secara bergantian, frekuensi munculnya mata dadu 1 sebanyak 4 kali, mata dadu 2 sebanyak 3 kali, mata dadu 3 sebanyak 7 kali, mata dadu 4

sebanyak 5 kali, mata dadu 5 sebanyak 4 kali, mata dadu 6 sebanyak 2 kali, tentukan rataan dari data tersebut.

Pemecahan masalah yang sering ditunjukkan oleh siswa berkaitan dengan kasus di atas adalah mereka menjumlahkan frekuensi dari data tersebut, kemudian membaginya dengan banyaknya peristiwa $\left(\frac{4+3+7+5+4+2}{6}=\frac{25}{6}=4{,}16\right)$. Hal ini adalah suatu masalah sebab walaupun siswa mampu memecahkan masalah tersebut dengan cepat, namun jawabannya tidak benar. Akan tetapi jika guru meluangkan waktu, walaupun hanya sebentar untuk menjelaskan hal tersebut, maka siswa pada umumnya akan mampu memecahkan masalah tersebut dengan baik dan benar.

Contoh 1.3:



Gambar di samping adalah mainan yang terbuat dari 15 batang korek api. Ambilah 3 batang korek api dari 15 batang korek api di samping, agar yang tersisa hanya 3 persegi? Korek api no. berapa saja yang di angkat?

Orang yang menghadapi permasalahan dalam matematika, dapat digolongkan ke dalam empat tipe, yaitu: (1) tipe pertama, adalah orang yang memiliki motivasi (keinginan menyelesaikannya) kurang atau rendah dan memiliki kompetensi (kemampuan) juga rendah, (2) tipe kedua, adalah orang yang memiliki motivasi tinggi, akan tetapi kompetensinya rendah, (3) tipe ketiga, adalah orang yang memiliki motivasi rendah, akan tetapi ia sebenarnya memiliki kompetensi tinggi, dan (4) tipe keempat, adalah orang yang memiliki motivasi tinggi dan kompetensi yang tinggi pula. Dari keempat tipe tersebut, tentunya tipe yang keempat senantiasa diharapkan tidaklah mudah dilakukan, karena perlu dibutuhkan ketelatenan, keuletan dan kesabaran.

B. MASALAH RUTIN DAN MASALAH TIDAK RUTIN

Suatu masalah biasanya memuat suatu situasi yang mendorong seseorang untuk menyelesaikannya akan tetapi tidak tahu secara langsung apa yang harus dikerjakan untuk menyelesaikannya.

Suatu soal dapat dipandang sebagai masalah, merupakan hal yang sangat relatif. Suatu soal yang dianggap sebagai masalah bagi seseorang, bagi orang lain mungkin hanya merupakan hal yang rutin belaka. Dengan demikian, guru perlu berhati-hati dalam menentukan soal yang akan disajikan sebagai pemecahan masalah. Bagi sebagian besar guru, untuk memperoleh atau menyusun soal yang benar-benar bukan merupakan masalah yang rutin bagi siswa termasuk pekerjaan yang sulit. Akan tetapi hal ini akan dapat diatasi antara lain melalui pengalaman dalam menyajikan soal yang bervariasi baik bentuk, tema masalah, tingkat kesulitan, serta tuntutan kemampuan intelektual yang ingin dicapai atau dikembangkan pada siswa.

Untuk memudahkan dalam pemilihan soal, perlu dilakukan pembedaan antara soal rutin dan soal tidak rutin. Soal rutin biasanya mencakup aplikasi suatu prosedur matematika yang sama atau mirip dengan hal yang baru dipelajari. Sedangkan dalam masalah tidak rutin, untuk sampai pada prosedur yang benar diperlukan pemikiran yang lebih mendalam. Menurut hasil penelitian *The National*

Assessment di Amerika Serikat mengindikasikan bahwa siswa SD pada umumnya menghadapi kesulitan dalam mengahadapi soal tidak rutin yang memerlukan analisis dan proses berfikir mendalam.

Pada tingkat sekolah dasar, masalah matematika dalam buku teks tertentu jarang menyajikan tentang bagaimana untuk mengembangkan ketrampilan berfikir matematika siswa. Para siswa harus diberikan masalah yang menarik dan menantang sehingga mereka akan memperoleh pengalaman dalam menganalisa informasi dan mengembang-kan pandangan menjadi suatu hubungan matematis. Masalah tidak rutin lebih kompleks daripada masalah rutin, sehingga strategi untuk memecahkan masalah mungkin tidak bisa muncul secara langsung, dan membutuhkan tingkat kreativitas dan orisinalitas yang tinggi dari si pemecah masalah *(solver)*. Oleh karena itu tujuan terpenting dari pembelajaran matematika seharusnya untuk membangun kemampuan siswa kita dalam memecahkan masalah. Meskipun sebagian guru percaya bahwa kemampuan memecahkan masalah terbentuk secara otomatis dari penguasaan keterampilan berhitung. Hal tersebut tidak sepenuhnya benar. Pemecahan masalah perlu ditekankan pada pembelajaran matematika sejak dini/ sejak awal.

Siswa yang sedang belajar matematika dan terbiasa dengan soal atau masalah yang tidak rutin, maka siswa tersebut akan terlatih dengan menerapkan berbagai konsep matematika dalam situasi baru, sehingga pada akhirnya mereka akan mampu menggunakan berbagai konsep ilmu yang telah mereka pelajari untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari mereka.

Contoh 1.4:

Perhatikan beberapa soal berikut :

1.

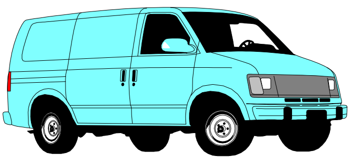
3194	6754
5346	8968
8877	7629
——— +	——— +
………	…………

2. Pada hari Senin ada 5479 orang yang menonton film, 3477 orang menonton pada hari Selasa dan 6399 orang menonton pada hari Rabu. Berapa jumlah orang yang menonton dalam tiga hari?

3. Gunakan tiap angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 paling sedikit satu kali untuk membentuk tiga buah bilangan empat-angka yang jumlahnya 9636!

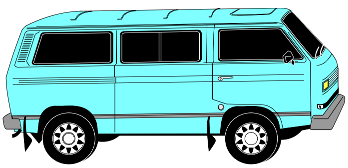
4. Siswa kelas V SDN “Gatotkaca” akan pergi berkemah. Ada 46 orang penumpang yang akan ikut, yaitu terdiri dari siswa-siswi dan guru pembimbing. Alat transportasi yang dapat di pilih ada 2, yaitu mobil Kijang dan Colt L-300.

Kijang



Tempat duduk: 6 orang

Colt L-300



Tempat duduk : 8 orang

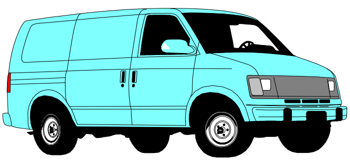
a) Apabila menggunakan mobil Kijang**,** berapa buah mobil Kijang yang dibutuhkan untuk pergi berkemah?

b) Apabila menggunakan mobil Colt L-300, berapa buah mobil Colt L-300 yang dibutuhkan untuk pergi berkemah?

c) Apabila tarip carter sebuah mobil Kijang adalah Rp. 600.000,-, dan sebuah mobil Colt L-300 adalah Rp. 750.000,- ; berapakah tarip termurahnya?

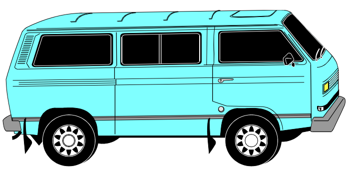
Panitia memutuskan ke 46 penumpang supaya membawa semua perlengkapannya yang dimasukkan ke dalam 14 kotak (dus) yang ukurannya sama, maka rinciannya:

Kijang



Tempat duduk : 4 orang
Barang : 3 kotak (dus)

Colt L-300



Tempat duduk : 6 orang
Barang : 2 kotak (dus)

d) Apabila panitia memutuskan untuk mencarter mobil Colt L-300 saja, berapa buah mobil Colt L-300 yang mereka perlukan? Catatan: demi keselamatan dalam perjalanan, tidak ada dus yang diletakkan di atas jok mobil.

e) Bagaimana seandainya panitia mencarter mobil Kijang saja, apa perbedaannya? Apa persamaannya?

Soal no (1) dan (2) merupakan contoh masalah rutin karena permasalahan yang terkandung didalamnya merupakan permasalahan yang berkaitan dengan operasi hitung, yaitu penjumlahan. Meskipun soal no (2) merupakan soal cerita, namun bagi sebagian besar anak SD, memilih operasi hitung yang sesuai dapat mengkaitkan dengan soal no (1) tentang penjumlahan sehingga operasi yang digunakan untuk menyelesaikan soal no (2) adalah penjumlahan. Sedangkan untuk soal no (3) merupakan contoh masalah tidak rutin karena untuk memperoleh jawaban yang cepat dan benar, siswa dituntut melakukan penghitungan untuk berbagai kemungkinan pasangan bilangan.

Bagi mereka yang memiliki *sense of number* cukup tinggi, mungkin bisa lebih efisien dalam proses pencarian jawaban yang tepat. Sebagai contoh, seorang anak menyadari bahwa jumlah dari tiga bilangan-bilangan dengan ujung-ujung 1, 3 dan 5, secara bersamaan. Untuk dapat menyelesaikan soal ini dengan baik, seoang anak tidak cukup hanya memiiki pengetahuan prasyarat. Sedangkan untuk soal no (4) a, b, c dapat diselesaikan dengan pengerjaan sederhana atau menggunakan algoritma perhitungan biasa.

Oleh karena itu, dapat kita simpulkan bahwa soal no 4. a, b, dan c termasuk masalah rutin, untuk soal no 4. d dan e mempunyai tingkat kesulitan yang berbeda dibandingkan soal no 4. a, b, c. Seorang siswa yang dihadapkan dengan soal no 4. d dan e ini, harus menentukan strategi yang tepat sebelum memulai untuk memecahkan pertanyaan tersebut. Oleh karena itu, soal no 4. d dan e merupakan masalah tidak rutin.

C. KLASIFIKASI MASALAH MATEMATIKA

Masalah di dalam matematika dapat diklasifikasi dalam dua jenis (Pusat Kurikulum, 2002 a, b, dan c), yaitu:

a. Penemuan *(Problem to find)*, yaitu mencari, menentukan, atau mendapatkan nilai atau objek tertentu yang tidak diketahui dari soal serta memenuhi kondisi atau syarat yang sesuai dengan soal.
b. Pembuktian *(Problem to prove),* yaitu prosedur untuk menentukan apakah suatu pernyataan benar atau tidak benar. Soal membuktikan terdiri atas bagian hipotesis dan kesimpulan. Untuk membuktikan kita harus membuat atau memproses pernyataan yang logis dari hipotesis menuju kesimpulan, sedangkan untuk membuktikan bahwa suatu pernyataan tidak benar kita harus memberikan contoh penyangkalnya sehingga pernyataan tersebut menjadi tidak benar.

Contoh 1.5:

Perhatikan beberapa contoh soal berikut:

1. Apa langkah pertama yang harus dilakukan dalam mengerjakan $3\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4}$?
2. Tentukan hasilnya bila $\frac{1}{4}$ x 6 : $2\frac{1}{2}$?
3. Manakah yang lebih luas, kebun yang berbentuk persegipanjang dengan panjang 314 m dan lebar 12 m atau kolam renang yang berbentuk lingkaran dengan jari-jari lingkaran 12 m?

4. Ani lebih tua dari Budi, Budi lebih tua daripada Chandra, Chandra lebih muda daripada Deni. Siapakah yang paling muda di antara mereka?
5. Diketahui sejumlah bangun geometri datar, yaitu persegi, persegipanjang, segitiga, lingkaran, belahketupat, jajargenjang, laying-layang, dan trapesium. Buatlah hubungan di antara mereka dalam bentuk diagram peta konsep!
6. Dengan cara bagaimana kita menunjukkan 6 dibagi 3 adalah 2?
7. Jelaskan mengapa $2\sqrt{5}$ x 3 $\sqrt{5}$ - 5 = 25 ?
8. Mengapa bilangan-bilangan ganjil dikalikan dengan bilangan genap selalu menghasilkan bilangan genap?
9. Mengapa setiap persegi adalah pesegi panjang?
10. Mengapa sebuah relasi belum tentu merupakan fungsi?

Dari soal-soal di atas soal no 1-5 merupakan masalah penemuan, sedangkan soal no 6-10 merupakan masalah pembuktian, mengapa?

- Pada soal no 1 siswa akan menentukan langkah pertama untuk mendapatkan nilai dari $3\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4}$ *(masalah penemuan)*
- Pada soal no 2 siswa akan mencari nilai dari $\frac{1}{4} x 6 : 2\frac{1}{2}$ *(masalah penemuan)*
- Pada soal no 3 siswa akan menentukan mana yang lebih luas dengan mencari luas kebun dan kolam renang

dengan ukuran masing-masing yang sudah di tentukan *(masalah penemuan)*

- Pada soal no 4 siswa akan menentukan kondisi yang sesuai soal dengan yang diberikan *(masalah penemuan)*
- Pada soal no 5 siswa akan mencari, menentukan, dan mendapatkan hubungan bangun geometri datar yang diberikan dalam diagram peta konsep *(masalah penemuan)*
- Pada soal no 6 siswa akan menunjukkan bahwa 6 dibagi 3 adalah 2 merupakan pernyataan yang bernilai benar *(masalah pembuktian)*
- Pada soal no 7 siswa akan menunjukkan bahwa $2\sqrt{5}$ x $3\sqrt{5}$ - 5 =25 adalah benar *(masalah pembuktian).*
- Pada soal no 8, 9, 10 merupakan masalah pembuktian diserahkan kepada Anda sebagai latihan.

D. PEMBELAJARAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

Belajar matematika tidaklah bermakna jika tidak dikaitkan dalam kehidupan sehari-hari. Karena dalam kegiatan kehidupan sehari-hari sering membutuhkan bantuan ilmu matematika, misalnya dalam jual-beli, bertani, dan lain-lain. Karena memang matematika tumbuh dan berkembang dari kehidupan sehari-hari manusia dengan segala aktivitasnya. Misalnya saja dalam pekembangan bilangan, yang dimulai dari bilangan asli, bilangan cacah, bilangan bulat, bilangan rasional/irrasional, bilangan khayal, dan bilangan kompleks muncul secara bertahap sesuai dengan kebutuhan manusia terhadap bilangan.

Manusia primitif membilang dimulai dari 1, 2, 3, dan seterusnya (bilangan asli), tetapi setelah ditemukan angka 0 (nol), maka kegiatan membilang pada dasarnya dimulai dari tidak ada, yaitu: 0, 1, 2, 3, ...(bilangan cacah). Karena kehidupan manusia makin kompleks dan berkembang adanya hak milik, maka muncul bilangan bulat, seperi mempuanyai hutang sesuatu diartikan sebagai mempunyai jumlah yang negatif dan sebaliknya jika mempunyai sesuatu diartikan mempunyai jumlah yang potitif, dan antara mempunyai sesuatu dengan mempunyai hutang adalah tidak mempunyai sesuatu atau dilambangkan dengan bilangan nol. Setelah itu berkembang bilangan rasional dan bilangan pecah, karena suatu bilangan tidak selalu habis dibagi habis, seperti 1 dibagi 2, ditulis $\frac{1}{2}$ 2 dibagi 3, ditulis $\frac{2}{3}$ dan sebagainya. Di pihak lain ada bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, seperti $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ dan lain sebagainya. Gabungan bilangan rasional dan irrasional dinamakan bilangahn real (nyata). Seterusnya muncul bilangan khayal, seperti bilangan dalam bentuk akar negatif ($\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt{-4}$ dan sebagainya. Gabungan antara bilangan real dan khayal dinamakan bilangan kompleks.

Siswa sekolah dasar dimulai kelas satu sudah sewajarnya dibekali dengan manfaat belajar matematika dalam kehidupan sehari-hari, yaitu selalu mengaitkan materi pembelajaran dengan kehidupan nyata yang terjadi dan yang sering dialami siswa.

Kemampuan kognitif siswa akan berkembang selaras dengan kematangannya, dan akan berkembang dengan baik dan cepat jika dalam belajarnya sering dihadapkan terhadap permasalahan kehidupan sehari-hari. Kita sebagai guru harus menyadari bahwa kemampuan manusia itu terbatas dan tidak sama irama perkembangan mentalnya, maka dari itu sebagai guru harus menyesuaikan pemberian materi pelajaran dengan kemampuan-kemampuan siswa-siswanya, seperti belajar dari hal-hal konkrit menuju abstrak, dari sederhana ke kompleks, dan dari mudah ke sulit.

Siswa diajak menyelesaikan pemecahan masalah dari satu langkah ke penyelesaian masalah yang membutuhkan banyak langkah yang disertai kemampuan memahami dan menangkap lebih banyak vatiabel dan faktor dalam suatu masalah.

Tidak ada cara yang pasti bagai mana melatihkan pemecahan masalah kepada siswa, namun ada petunjuk yang dapat membantu guru dalam membelajarkan siswanya kearah penggunaan pendekatan pemecahan masalah matematika, agar siswa belajarnya terarah dan mendapat hasil yang baik.

E. LANGKAH-LANGKAH PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

Polya (Upu, 2004) mengartikan pemecahan masalah sebagai suatu usaha mencari jalan keluar dari suatu kesulitan guna mencapai suatu tujuan yang tidak begitu mudah segera dicapai. Sumarmo (Upu, 2004) menegaskan bahwa pemecahan masalah dapat berupa menciptakan ide baru, menemukan teknik atau produk baru. Bahkan di dalam pembelajaran matematika, selain pemecahan masalah mempunyai arti khusus, istilah tersebut juga mempunyai interpreasi yang berbeda. Misalnya, menyelesaikan soal cerita atau soal yang tidak rutin dan mengaplikasikan matematika dalam kehidupan sehari-hari.

Pemecahan adalah proses dalam memecahkan atau menyelesaiakan (KBBI online 2012), kemudian pemecahan masalah menurut Branca (Upu, 2004) menegaskan bahwa terdapat tiga macam interpretasi mengenai pemecahan masalah, yaitu: (1) pemecahan masalah sebagai tujuan yang menekankan pada aspek mengapa matematika diajarkan. Hal ini berarti bahwa pemecahan masalah bebas dari materi khusus. Sasaran utama yang ingin dicapai adalah adalah bagaimana cara memecahkan suatu masalah. (2) pemecahan masalah sebagai proses diartikan sebagai kegiatan yang aktif. Dalam hal ini penekanan utamanya terletak pada metode, strategi atau prosedur yang digunakan oleh siswa dalam menyelesaikan masalah hingga mereka menemukan jawaban. (3) pemecahan masalah sebagai keterampilan menyangkut dua hal, yaitu: (a) keterampilan umum yang harus dimiliki oleh siswa untuk keperluan evaluasi. (b) keterampilan minimum yangdiperlukan siswa agar dapat mengaplikasikannya dalam kehidupan sehari-hari.

Menurut Polya (Alimuddin, 2012), pemecahan masalah matematika terdiri atas 4 (empat) langkah, yaitu:

1. Memahami masalah, meliputi: menemukan dengan tepat apa yang ditanyakan dan apa yang diketahui, menemukan syarat-syarat apa yang sudah dipenuhi dan syarat-syarat apa yang masih diperlukan, menuliskan soal dengan kalimatnya sendiri, merumuskan sub-sub masalah,

2. Merencanakan penyelesaian, meliputi: menuliskan atau menyebutkan dengan tepat soal-soal yang pernah dijumpai yang mirip dengan soal yang dihadapi,

menuliskan atau menyebutkan konsep-konsep, sifat-sifat, prinsip-prinsip matematika yang terkait dengan soal yang dihadapi, mengaitkan konsep-konsep, sifat-sifat, prinsip-prinsip matematika dengan masalah/soal yang dihadapi, merumuskan beberapa strategi penyelesaian yang dapat digunakan dalam menyelesaikan masalah yang dihadapi,

3. Melakukan rencana penyelesaian, meliputi: memilih strategi yang tepat dan mengimplementasikan strategi,
4. Melihat kembali pekerjaan yang telah kita lakukan meliputi: apakah jawaban sudah sesuai dengan pertanyaan?, apakah jawaban sesuai kaedah matematika?, apakah jawaban rasional ?.

Sedangkan pemecahan masalah yang dimaksudkan dalam penelitian (Bahar, 2013) terkait dengan masalah soal cerita dengan segera dapat menemukan penyelesaiannya melalui tahapan-tahapan sebagai berikut:

1. Memahami soal dengan menentukan apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan.
2. Merencanakan penyelesaian dengan menyusun strategi yang dapat digunakan dalam menyelesaikan soal.
3. Mengimplementasikan penyelesaian dengan menetapkan atau memilih strategi yang sesuai dalam meyelesaiakan soal dan melakukan perhitungan.
4. Verifikasi yaitu melihat kembali jawaban yang telah lakukan apakah jawaban sudah sesuai dengan apa yang ditanyakan.

Sehingga beberapa keterampilan untuk meningkatkan kemampuan memecahkan masalah antara lain adalah: (1)

memahami soal, (2) Merencanakan penyelesaian dengan menyusun strategi, (3) Mengimplementasikan penyelesaian, dan (4) Verifikasi.

1) Memahami Soal

Guru memberi masalah dalam bentuk soal setiap hari, baik dalam jam pelajaran matematika, maupun pada mata pelajaran lain secara terpadu (karena matematika banyak kaitannya dengan Bahasa, IPS, IPA, dan lain-lain), dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1) menjelaskan kata atau ungkapan operasi hitung yang sering digunakan, seperti sebagai berikut:

   Penjumlahan: digabungkan, disatukan, dijadikan satu wadah, dijumlahkan, dimasukan, dan pengulangan suatu kegiatan.

Contoh 1.6:

(1) Amin mempunyai 10 kelereng dan Andri mempunyai 8 kelereng, jika kelereng Amin dan Andri *digabungkan/disatukan/dijadikan satu wadah* maka jumlah kelereng mereka berjumlah ...

(2) Kelereng Amin dalam gelas ada 5, lantas *dimasukan* lagi sebanyak 4 kelereng, maka kelereng Amin dalam gelas sekarang ada ... kelereng.

(3) Pada hari senin Amin menyimpan uang dalam celengan sebanyak Rp 2.000,00, pada hari selasa sebanyak Rp 5.000,00, pada hari rabu sebanyak Rp 3.000,00. Berapa rupiah banyak uang yang tersimpan dalam celengan tersebut

Pengurangan: selisih/ beda, dikurangi/berkurang, diambil, dipisahkan, dan dibagikan.

Contoh 1.7:

(1) Amin mempunyai uang sebesar Rp 5.000,00 sedangkan Ani mempunyai Rp 7.000,00. Berapakah *selisih/beda* uang Amin dan Ani?

(2) Andri diberi uang jajan dalam satu minggu sebanyak Rp 10.000,00 setalah hari ke empat uangnya berkurang Rp 4.000,00. Berapakah sisa uang Andri sekarang?

(3) Pak Budi mempunyai anak ayam yang baru menetas sebanyak 10 ekor, yang 5 ekor *dipisahkan* dari induknya. Berapakah anak ayam yang ikut induknya?

(4) Pak Budi mempunyai uang sebanyak Rp 50.000,00, uang tersebut dibagikan kepada 2 oarng pakir miskin sebanyak Rp 15.000,00. Berapakah rupiah sisa uang Pak Budi sekarang?

Perkalian: digandakan sebanyak ... kali, setiap ... terdiri dari ..., kegiatan yang berulang-ulang (dalam jumlah yang sama)

Contoh 1.8:

(1) Pak Budi meminjam uang dari "Bank Keliling" sebanyak Rp 1.000.000,00 karena ia tak mampu membayar dalam waktu satu tahun utangnya *digandakan sebanyak* 3 *kali.* Berapa rupiah Pak Budi harus membayar utangnya jika dalam satu tahun tidak bisa membayar?

(2) Kelurahan Munjuljaya terdiri dari 2.500 Kepala Keluarga (KK), *setiap* harinya masing-masing KK

membuang sampah *terdiri dari* 1 kg. Berapa kg sampah yang terkumpul dalam satu bulan?

(3) Kasir bank menghitung uang menggunakan jari-jarinya, dalam satu kali gerakan jari-jarinya mampu mengambil empat lembar uang. Jika dia menggerakan jari-jarinya sebanyak 25 kali, maka berapa lembar uang yang dia hitung?

Pembagian: pengurangan yang berulang, dibagikan, dipisah-pisah (dalam jumlah yang sama)

Contoh 1:9:

(1) Amin mempunyai 100 kelereng, setiap hari diambilnya sebanyak 5 kelereng. Pada hari ke berapa kelereng itu habis?

(2) Pak Budi membagikan uang zakat sebanyak Rp 1.000.000,00 kepada 100 orang pakir miskin. Berapa rupiah rata-rata kebagian setiap orangnya?

(3) Pak Budi mempunyai ayam sebanyak 50 ekor, ayam tersebut dipisahkan-pisahkan dalam 10 kandang. Berapa ekor rata-rata isi setiap kandangnya?

2) menjelaskan hubungan antara penjumlahan dengan pengurangan, perkalian dengan pembagian, penjumlahan dengan perkalian, dan pengurangan dengan pembagian.

Contoh 1.10:

- **Penjumlahan dengan pengurangan:**
  Jika a + b = c , berlaku c – a = b atau c – b = a
- **Perkalian dengan pembagian:**

Jika a x b = c , berlaku c : a = b atau c : b = a

- **Penjumlahan dengan perkalian:**
  5 + 5 + 5 + 5 = 4 x 5
- **Pengurangan dengan pembagian**.:
  10 – 2 – 2 – 2 – 2 – 2 = 10: 2

3) melatih membaca pemahaman dari kalimat pendek dan sederhana ke kalimat panjang dan kompleks. Cobalah dengan menggunakan metode diskusi untuk membahas soal yang diberikan dengan fokus isi pokok kalimat. Apakah topik / tema yang dibicarakan, informasi apa yang diberikan, apa yang ditanyakan, dan sebagainya.

a) Bertanya kepada siswa tentang isi kalimat yang diberikan dalam contoh, tentang apa yang diketahui atau data apa yang diberikan dan apa yang ditanyakan atau apa yang akan dicari.

   Dalam hal ini guru yang mengajukan pertanyaan tentang isi kalimat yang dijadikan contoh.

b) Pada tahap awal, pembuatan paragrap cukup terdiri dari satu kalimat, dan jangan berbelit-belit sehingga sulit dimengerti siswa.

Contoh 1.11:
Kasir bank menghitung uang menggunakan jari-jarinya. Dalam satu kali gerakan jari-jarinya mampu mengambil empat lembar uang. Dia menggerakan jari-jarinya sebanyak 25 kali. Berapa lembar uang yang dia hitung?

2) **Merencanakan penyelesaian dengan menyusun strategi**

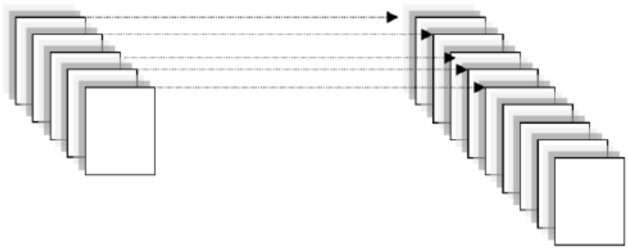
Seperti yang telah dibahas pada modul 1, pendekatan atau strategi pemecahan masalah banyak sekali alternatif yang harus kita pakai, hal tersebut didasarkan pada jenis masalah atau soal. Starategi tersebut adalah: membuat tabel, membuat gambar, menduga, mencoba, memperbaiki, mencari pola, mengguanakan penalaran, menggunakan variabel, membuat persamaan, mengunakan algoritma, menggunakan sifat-sifat bilangan, menggunakan rumus, menggunakan informasi yang diketahui untuk mengembangkan informasi baru, dan lain lain.

Bagi siswa yang belum dapat berpikir abstraks pendekatan dengan membuat gambar terlebih dahulu akan sangat membantu. Hal tersebut dapat dilakukan secara konkrit atau dengan gambaran obyek yang dimaksud. Setelah itu berkembang kepada strategi-strategi lain yang memungkinkan suatu masalah dapat diselesaikan secara matematis, seperti membuat variabel, membuat persamaan, menggunakan logika, dan lain-lain.

Contoh 1.12:

(1) Penjumlahan dan pengurangan
Pada mulanya Ani mempunyai 5 buku, kemudian Ibunya memberi sejumlah buku sehingga buku Ani sekarang menjadi 9 buku. Berapakah Ibu memberi buku kepada Ani?
Jawab:

Lakukan secara konkrit atau dengan membuat gambar, seperti berikut.



Tanyakan kepada siswa ada berapa buku yang tidak mempunyai pasangan seperti yang digambarkan di atas dan buku yang tidak mempunyai pasangan tersebut merupakan buku pemberian Ibu. Lantas bimbing siswa kearah model matematika yang terbentuk, seperti: 5 buku + ... buku = 9 buku atau 5 + ... = 9

Dari gambar sudah didapat bahwa buku yang tidak mempunyai pasangan sebanyak 4 buku, dan itu adalah buku pemberian Ibu. Jadi kalimat matematika yang terbentuk adalah: 5 + 4 = 9

Jika strategi dengan pembuatan gambar telah dikuasai, meningkatlah kepada pembuatan variabel, boleh dengan “x, y, n, m, dll”.seperti berikut ini.

Diketahui: Ani mempunya 5 buku
Setelah diberi Ibu menjadi 9 buku
Ditanyakan: Berapakah buku pemberian Ibu?

Jawaban:
Misalkan buku pemberian Ibu = x, maka
$5 + x = 9$
$5 + (-5) + x = 9 + (-5)$

x = 4

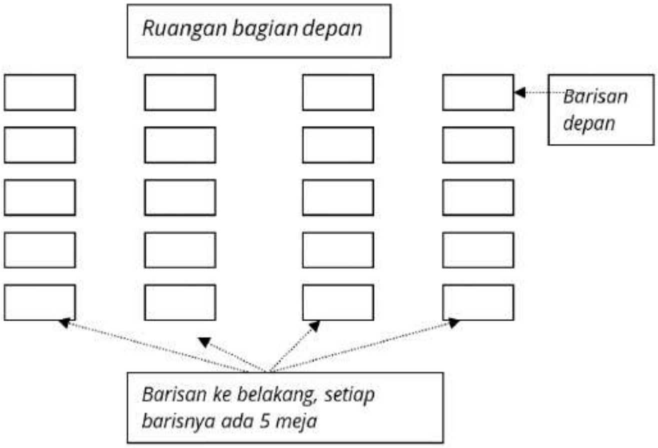
Jadi, buku pemberian Ibu sebanyak 4 buku

(2) Perkalian dan Pembagian

Di kelas tiga ada 20 meja yang disusun secara teratur, barisan terdepan ada 4 meja. Ada berapa meja setiap baris ke belakang?

Jawab:

Membuat gambar



Dalam membuat gambar lakukan membuat meja barisan terdepan sebanyak 4 meja, lantas buatlah gambar meja ke belakang sambil membilang sampai 20 meja. Sehingga gambar akan seperti di atas. Meja sebanyak 5 ke belakang merupakan jawaban dari soal tersebut.

Model matematikanya adalah: 4 x ... = 20 atau

Misalkan setiap baris meja kebelakang = m, maka 4 x m = 20

Jika kedua ruas dibagi dengan 4, maka m = 5

Jadi baris meja ke belakang ada 5 meja

(3) Operasi hitung campuran

Ibu belanja telur 4 kg dan terigu 3 kg, harga setiap kilogram telur Rp 8.000,00 dan harga setiap kilogram terigu Rp 4.000,00. Ibu membayar dengan uang Rp 50.000,00. Berapakah sisa uang Ibu?

Jawab

Diketahui

(a) 4 kg @ Rp 8.000,00

(b) 3 kg @ Rp 4.000,00

(c) Ibu membayar Rp 50.000,00

Ditanyakan berapa rupiah uang sisa (pengembalian)?

Model matematikanya:

50.000 – [(4 x 8.000) + (3 x 4.000)] = ...

50.000 – [32.000 + 12.000] = ...

50.000 – 44.000 = 6.000

Jadi sisa (pengembalian) uang Ibu adalah Rp. 6.000,00

3) Mengimplementasikan penyelesaian

Dalam menyelesaikan model matematika siswa dituntut untuk terampil menggunakan pengetahuannya tentang konsep-konsep dasar matematika beserta aturan-aturan yang ia ketahui sewaktu mengerjakan latihan-latihan soal. Baik dalam bentuk algoritma maupun secara aljabar sederhana. Seperti hubungan penjumlahan dan pengurangan, perkalian dan pembagian, pangkat dan akar.

Dalam penyelesaian model matematika siswa telah paham dan terampil, seperti hal-hal sebagai berikut:

(a) a + b = c, kalimat matematika ini dapat dibolak balik sesuai dengan pola yang didapatkan dalam menterjemahkan (mentransformasi) kedalam model matematika, seperti menjadi c – a = b atau c – b = a

(b) a x b = c, kalimat matematika ini dapat dibolak balik sesuai dengan pola yang didapatkan dalam menterjemahkan (mentransformasi) kedalam model matematika, seperti menjadi c : a = b atau c : b = a

(c) a^2 = b, dapat diubah menjadi a = $\sqrt{b}$ atau $\sqrt{b^2}$ = b

(d) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ atau $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

(e) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc$

(f) dan lain-lain

4) Verifikasi

Sebelum ditafsirkan/diterjemahkan kedalam bentuk kesimpulan, sebaiknya siswa dibiasakan untuk memeriksa dulu, apakah jawaban hasil perhitungan itu benar atau masih terdapat kekeliruan. Untuk ini dibutuhkan ketelitian untuk mengecek ulang hasil perhitung yang didapatkan.

Menafsirkan solusi merupakan kemampuan berpikir tingkat tinggi, karena hal tersebut merupakan penarikan kesimpulan dari hal-hal yang telah dianalisis dengan menggunakan berbagai srtategi dan menggunakan berbagai opersi hitung. Menafsirkan solusi merupakan menemukan jawaban dari permasalahan yang sedang dibahas atau diuraikan.

Contoh 1.13:
Ina disuruh Ibu membeli sebanyak 10 telur, di perjalanan pulang telur yang dibeli tersenggol temannya, ketika dihitung telur yang utuh tinggal 6 telur. Berapa butir telur yang pecah?

Jawab
Diketahui :
Beli telur 10
Sisa telur 6
Ditanyakan:
Telur yang pecah

Jawab:
Alternatif kalimat:
(1) (Semua telur yang dibeli) - (Sisa telur yang utuh) = (telur yang pecah)
(2) (Sisa telur yang utuh) + (telur yang pecah) = (Semua telur yang dibeli)
(3) 10 – 6 = ...
(4) 6 + ... = 10

Alternatif Pemecahan:
(1) Perlihatkan 10 benda (sebagai pemisalan telur) lantas ambil sebanyak 6, maka sisanya 4 benda
(2) Perlihatkan 10 jari lantas hitung mundur sebanyak 6 kali bertepatan dengan melipat jari, maka sisa jari yang belum telipat sebanyak 4.

(3) Gambarlah 10 telur lantas pasangkan dengan gambar 6 telur, maka 4 telus tidak mempunyai pasangan

(4) Enam ditambah berapa agar mnejadi sepuluh? Hitung dimulai 6 sebanyak yang dibutuhkan sehingga berhenti di 10, sambil mengacungkan jari.

(5) Jika siswa telah memahami konsep penjumlahan dan pengurangan, maka siswa langsung dibimbing ke model matematika dan menyelesaikannya dengan aturan-aturan tertentu.

Kesimpulan

Jadi telur yang pecah sebanyak 4 telur

Contoh 1.14:

Suatu bak mandi mempunyai panjang dua kali lebarnya, dan tingginya setengah dari lebarnya. Jika luas alas bak itu 7.200 cm^2 berakah liter isi bak air tersebut?

Jawab:

Diketahui:

Panjang bak 2 kali lebar

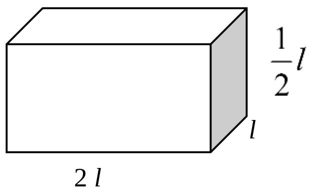
Tinggi bak $\frac{1}{2}$ lebar

Luas = 7.200 cm^2

Ditanyakan: isi bak dalam liter

Jawab:

Gambar:



Mencari ukuran bak

$2\ l \times l = 7200$

$2\ l^2 = 7200$

$l^2 = 3600$

$l = \sqrt{3600}$

$l = 60$

Jadi lebar (l) = 60 cm

Karena lebar 60 cm, maka panjang (p) = 2 x 60 = 120 cm

dan tingginya (t) adalah $\frac{1}{2} x 60 = 30$ cm

Rumus volum (isi) bak (yang berbentuk balok) adalah p x l x t, yaitu: 120 cm x 60 cm x 30 cm = 216.000 cm^3

Karena yang ditanyakan adalah dalam bentuk satuan liter, maka 216.000 cm^3 = 216 dm^3 = 216 liter

Jadi isi bak mandi tersebut adalah 216 liter.

Dari proses penyelesaian soal di atas, dapat dirinci langkah-langkah sebagai berikut:

(1) Memahami soal, seperti yang terlihat dalam menyederhanakan soal dalam bentuk yang diketahui dan ditanyakan.

(2) Membuat gambar bak mandi yang mempunyai panjang, lebar, dan tinggi. Dalam hal ini harus ingat bahwa bentuk demikian adalah balok yang rumus isinya adalah: p x l x t

(3) Mencari ukuran bak yang didahului dengan menterjemahkan luas alas bak yang berbentu balok, yaitu: panjang kali lebar dalam bentuk variabel *l*, seperti: $2\ l \times l = 7200$

(4) Menjalankan operasi hitung, sehingga ditemukan ukuran lebar yang dimaksud.

(5) Mengaitkan hasil operasi hitung dengan pernyataan yang diketahui. Sepeti panjangnya dua kali lebarnya dan tingginya setengah lebarnya. Sehingga ditemukan ukuran panjang dan tinggi

(6) Karena panjang, lebar, dan tinggi sudah diketahui maka isi bak dapat diketahui dengan menjalankan rumus isi (volumea) balok.

(7) Volum bak sudah diketaui tetapi membutuhkan transformasi dari bentuk cm^3 ke liter melalui dm^3.

(8) Menyimpulkan isi bak air sebagai hasil proses sebelumnya.

Jelaslah, bahwa suatu proses penyelesaian masalah sangatlah kompleks dan banyak hal-hal yang terkait, sehingga membutuh daya nalar yang cukup tinggi.

F. RANGKUMAN

1) Masalah dalam matematika terdiri dari masalah rutin dan masalah tidak rutin
2) Klasifikasi masalah matematika terdiri dari dua yaitu:
   a. Penemuan yaitu mencari, menentukan, atau mendapatkan nilai atau objek tertentu yang tidak diketahui dari suatu soal dan memenuhi kondisi ataui syarat dari soal tersebut.
   b. Pembuktian yaitu prosedur untuk menentukan apakah suatu pernyataan benar atau tidak
3) Langkah-langkah dalam pemecahan masalah matematika (menurut Polya)
   a. Memahami masalah
   b. Merencanakan penyelesaian
   c. Melakukan rencana penyelesaian
   d. Melihat kembali

G. LATIHAN

1. Dari beberapa pengertian masalah menurut beberapa sumber yang telah disebutkan di atas, menurut Anda apa sebenarnya yang dimaksud dengan masalah?
2. Apa syarat suatu situasi disebut sebagai suatu masalah?
3. Mengapa contoh (3) merupakan masalah bagi siswa SD?
4. Berikan contoh soal yang termasuk masalah bagi siswa SD!
5. Apa syarat suatu soal dapat dipandang sebagai masalah rutin bagi siswa SD?
6. Apa syarat suatu soal dapat dipandang sebagai masalah tidak rutin bagi siswa SD?
7. Berikan contoh masalah rutin dan masalah tidak rutin bagi siswa SD! Jelaskan!
8. Apa yang dimaksud dengan masalah penemuan?
9. Apa yang dimaksud dengan masalah pembuktian?
10. Apa ciri-ciri suatu soal merupakan masalah penemuan dan ciri-ciri suatu soal merupakan masalah pembuktian?
11. Berikan contoh masalah penemuan dan masalah pembuktian dalam matematika! Jelaskan!
12. Perhatikan ilustrasi-ilustrasi berikut dan tentukan termasuk pada bilangan apa yang dimaksud?
    a) Amin menghitung jumlah kambing peliharaannya dimulai dari 2, 4, 6, 8, dan 10.

b) Ahmad membagikan 5 roti kepada 2 orang temannya samaa banyak.
c) Ani menghitung panjang sisi-sisi daerah segitiga dengan menggunakan rumus: $c^2 = a^2 + b^2$
d) Budi mempunyai meminjam uang di Bank Guna Usaha sebanyak Rp. 10.000.000,00

13. Pengetahuan apakah yang harus dimiliki oleh seorang pemasang ubin lantai agar jumlah ubin yang akan dipasangkan diketahui secara pasti?

14. Ayah telah mempunyai pagar sepanjang 40 m untuk memagari kandang itik (berbentuk persegipanjang) di belakang rumahnya ada tembok belakang dapat dijadikan salah satu sisi persegi panjang. Berapakah ukuran yang dapat dibuat agar ukuran luas persegi panjang tersebut yang paling luas?
    Dari soal tersebut di atas apa saja yang diketahui yang menjurus kepada penyelesaian soal?

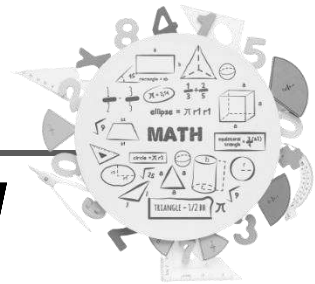
15. Hasil survei terhadap kelas enam yang terdiri dari 40 siswa, 22 orang menyenangi pelajaran matematika, 21 orang menyenangi pelajaran IPA, 20 orang menyenangi pelajran IPS. 3 orang menyenangi pelajaran Matematika dan IPA, 4 orang menyenangi pelajaran IPA dan IPS, 6 orang menyenangi pelajaran Matematika dan IPS, dan 5 orang yang menyenangi ketiga pelajaran tersebut. Buatlah gambarnya!

16. Buatlah kalimat matematika dari pernyataan-pernyataan berikut ini.
    a) Bilangan yang berurutan jumlahnya 21.
    b) Amin mendapat bunga bank sebesar Rp 500.000,00 dari saldo simpanan sebesar Rp

5.000.000,00. Berapa persen bunga yang diterima Amin?

c) Harga 4 pensil dan 5 spidol sebesar Rp 35.000,00
d) Lampu merah menyala setiap 5 detik, lampu kuning menyala setiap 6 detik, lampu hijau menyala setiap 8 detik, dan lampu biru menyala setiap 12 detik. Jika ke empat lampu dinyalakan secara bersamaan pada detik ke berapa lampu merah dan lampu kuning menyala bersamaan yang ke dua, ke tiga, dan ke empat. Pada detik ke berapa lampu hijau dan lampu biru menyala bersamaan yang ke dua, ke tiga, dan ke empat.

BAB 2



PENALARAN DALAM MATEMATIKA

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan ini, kita sering mengalami berbagai peristiwa, baik itu peristiwa menyenangkan maupun peristiwa tidak menyenangkan. Contoh peristiwa menyenangkan adalah kita mendapat rezeki, sedangkan contoh peristiwa tidak menyenangkan, adalah pada saat kita mendapat cobaan sakit. Jika kita menghadapi peristiwa yang menyenangkan, kita tidak boleh terlalu bergembira tetapi kita harus mensyukuri nikmat Allah SWT, sebaliknya jika menghadapi peristiwa yang tidak menyenangkan kita tidak boleh terlalu larut dalam kesedihan, tetapi kita harus berpikir positif dan mengunakan akal dan penalaran kita. Seringkali kita berpendapat dengan melibatkan perasaan, prasangka, dan membuat kesimpulan-kesimpulan yang tidak berdasar. Kita sebagai manusia diberi kelebihan oleh Allah SWT dalam bentuk akal yang kita gunakan untuk berpikir dan bernalar.

Penalaran dapat diartikan sebagai cara berpikir, merupakan penjelasan dalam upaya menunjukkan hubungan antara beberap hal yang berdasarkan pada sifat-sifat atau hukum-hukum tertentu yang diakui kebernarnnya. Secara singkat, penalaran sebagai proses penarikan kesimpulan dalam sebuah argumen. Kemampuan materi matematika seseorang tidak dapat dilepaskan dari kemampuan penalaran. Artinya materi matematika dapat dengan mudah dipahami dengan adanya kemampuan bernalar yang baik. Bagaimana seharusnya kita menggunakan penalaran yang baik? Oleh karena itu, marilah kita membahas mengenai penalaran tersebut. Penalaran dalam matematika ada dua jenis, yaitu: penalaran induktif dan penalaran deduktif.

Aktivitas Kegiatan 1:

1. Gambarlah segitiga lancip, segitiga siku-siku, dan segitiga tumpul!
2. Dengan menggunakan busur derajat, hitunglah besar sudut masing-masing segitiga tersebut!
3. Berapa derajatkah jumlah ketiga sudut masing-masing segitiga tersebut?
4. Apakah yang dapat anda simpulkan dari kegiatan ini?

Kegiatan 2:

Pertandingan sepakbola di wilayah timur Indonesia diikuti oleh 15 kesebelasan. Sistem pertandingan menggunakan sistem kompetisi penuh (setiap kesebelasan masing-masing bertanding 2 kali dengan kesebelasan-kesebelasan lainnya, yaitu satu kali bertanding di daerah sendiri dan satu kali bertanding di daerah lawan). Berapa pertandingan yang akan terjadi jika semua dilakukan? Jika n kesebelasan berapa pertandingan yang dilakukan?

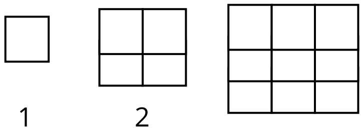
1. Lengkapilah tabel berikut:

Banyak kesebelasan	Pertandingan yang terjadi	Pola operasi hitung
1	0	1 x 0
2	2	2 x 1
3	...	3 x 2
4	12	...
5	...	...
...	...	...
15	...	...
n	...	...

2. Apakah yang dapat anda simpulkan dari kegiatan tersebut?

Kegiatan 3:

Perhatikan gambar berikut:



1 2 3

Gambar ke-1 terdiri dari 1 persegi kecil
Gambar ke-2 terdiri dari 4 persegi kecil
Gambar ke-3 terdiri dari 9 persegi kecil

a. Buatlah dua gambar berikutnya (yang ke-4 dan ke-5)
b. Berapa banyak persegi kecil pada gambar ke-n?

Dari kegiatan 1, 2 dan 3 apa yang dapat anda simpulkan? Bagaimana dengan permasalahan berikut ini? Apa yang dapat kalian simpulkan?

Tentukan pola umum (generalisasi) yang mungkin berlaku pada deret 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n – 1), untuk setiap bilangan asli *n*. Kemudian tentukan jumlah dari 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 199.

✍ $1 = 1 = 1^2 = \left(\frac{1+1}{2}\right)^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2 = \left(\frac{1+3}{2}\right)^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2 = \left(\frac{1+5}{2}\right)^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = \ldots = \ldots = \left(\frac{1+\cdots}{2}\right)^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \ldots = \ldots = \ldots$

dan seterusnya. Dengan memperhatikan pola tersebut di atas dapat diduga bahwa untuk sembarang bilangan asli *n* berlaku :

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = \ldots = n^2$

✍ Dengan menggunakan pola umum yang telah diperoleh tentukan jumlah

1 + 3 + 5 + 7 + ... + 199

A. PENALARAN INDUKTIF

Kalau hujan turun dengan lebat, biasanya kita akan membuat kesimpulan bahwa; sebentar lagi akan terjadi banjir. Kesimpulan seperti ini merupakan suatu dugaan. Dugaan tersebut diambil berdasar pada pengalaman sebab biasanya kalau turun hujan, maka dimana-mana terdapat genangan air karena tersumbatnya saluran. Contoh seperti ini merupakan salah satu penalaran induktif.

Penalaran induktif adalah proses berpikir untuk menarik suatu kesimpulan yang berlaku umum berdasarkan atas fakta-fakta yang bersifat khusus. Penalaran induktif digunakan oleh beberapa cabang ilmu pengetahuan seperti fisika, kimia, biologi, dan sebagainya untuk membangun suatu teori baru. Sebagai contoh dalam ilmu fisika, dalam suatu percobaan seorang peneliti berhasil menunjukkan bahwa besi, seng, perak, dan aluminium apabila dipanaskan akan memuai. Berdasarkan hasil percobaan tersebut, peneliti tersebut mengamati bahwa besi, seng, perak dan aluminium termasuk jenis logam. Oleh karena itu kemudian ia membuat suatu generalisasi bahwa setiap logam apabila dipanaskan memuai.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa berpikir induktif adalah berpikir menggunakan kejadian atau pengalaman yang sering dijumpai disimpulkan menjadi kebenaran secara umum.

BERPIKIR KRITIS

$n^2 + n + 41$ merupakan bilangan prima, untuk n bilangan asli 1 sampai dengan 40. Apakah diperoleh bilangan prima? Bagaimana untuk n = 41? Apakah juga diperoleh bilangan prima?

B. PENALARAN DEDUKTIF

Berlawanan dengan pemikiran induktif adalah berpikir deduktif. Penalaran deduktif yaitu proses berpikir berdasarkan atas suatu pernyataan dasar yang berlaku umum untuk menarik suatu kesimpulan yang bersifat khusus. Penalaran deduktif digunakan dalam matematika. Aturan yang berlaku secara umum tersebut, pada umumnya dibuktikan terlebih dahulu kebenarannya dan setelah terbukti kebenarannya baru diterapkan untuk kasus-kasus yang bersifat khsusus. Sebagai contoh, diberikan aturan umum bahwa sudut-sudut yang bertolak belakang adalah kongruen, diketahui sudut A bertolak belakang dengan sudut B dan ukuran sudut B adalah 60^o, maka kesimpulannya ukuran sudut A adalah 60^o.

Pada mulanya, matematika timbul karena adanya pikiran-pikiran manusia yang berhubungan dengan ide, proses dan penalaran. Oleh karena itu, walaupun matematika menggunakan penalaran deduktif, namun para matematikawan dapat menyusun atau menemukan bagian-bagian matematika dengan menggunakan penalaran induktif. Tetapi begitu pola umum atau generalisasi ditemukan maka pola umum atau generalisasi tersebut harus dapat dibuktikan kebenarannya secara deduktif.

Penalaran deduktif berlangsung dari pernyataan yang umum ke khusus. Proses untuk sistem penalaran dalam matematika secara deduktif diawali dengan membuat suatu konsep pangkal. Konsep pangkal sebagai sarana komunikasi untuk menyusun pertanyaan-pertanyaan selanjutnya berupa definisi, aksioma maupun teorema.

Contoh 2.1:

Diketahui: Berdasarkan aksioma-aksioma

A_1: pada R berlaku hukum komutatif perkalian

A_2: pada R berlaku hukum distributive perkalian pada penjumlahan

A_3: $a^2 = a \times a$ untuk setiap $a \in R$

Maka buktikan bahwa $\forall a, b \in R, (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Bukti:

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ karena A_3

$(a + b)^2 = (a + b) \times a + (a + b) \times b$ karena A_2

$(a + b)^2 = a \times a + b \times a + a \times b + b \times b$ karena A_1

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ karena A_3

C. LANGKAH-LANGKAH PENALARAN INDUKTIF & DEDUKTIF

Secara umum, langkah-langkah penalaran yang digunakan dalam matematika sebagai berikut:

1. Mengamati pola-pola yang terjadi,
2. Membuat dugaan (konjektur) tentang pola umum yang mugkin berlaku,
3. Membuat generalisasi,
4. Membuktikan generalisasi secara deduktif.

Contoh 2.2:

Tentukan pola umum (generalisasi) yang mungkin berlaku pada deret 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n, untuk setiap bilangan asli n. Kemudian tentukan jumlah dari 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 200.

Pembahasan:

$$1 = 1 = 1.\frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2}.$$

$$1 + 2 = 3 = 2.\frac{3}{2} = \frac{2(2+1)}{2}.$$

$$1 + 2 + 3 = 6 = 3.\frac{4}{2} = \frac{3(3+1)}{2}$$

.

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 4.\frac{5}{2} = \frac{4(4+1)}{2}$$

.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \quad = \quad 5.\frac{6}{2} \quad = \quad \frac{5(5+1)}{2}.$

dan seterusnya. Dengan memperhatikan pola tersebut di atas dapat diduga (digeneralisasikan) bahwa untuk sembarang bilangan asli *n* berlaku :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dengan memperhatikan hasil generalisasi tersebut di atas diperoleh:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 200 = \frac{200(200+1)}{2} = 20.100.$$

Dalam matematika, generalisasi pada contoh 1 tidak dibenarkan dan perlu dibuktikan secara deduktif. Namun untuk pembelajaran di Sekolah Dasar pembuktian secara deduktif tidak perlu dilakukan, karena pada umumnya tahap berpikir siswa Sekolah Dasar masih dalam tahap berpikir induktif (tahap berpikir operasi konkret).

Contoh 2.3:

Secara induktif, tentukan generalisasi yang mungkin berlaku apabila sembarang dua buah bilangan ganjil dikalikan, dan kemudian secara dedutif buktikan bahwa generalisasi tersebut benar secara matematika.

Pembahasan:

Untuk menyelidiki pola umum yang mungkin terjadi pada perkalian sembarang dua buah bilangan ganjil, perhatikan tabel 1 berikut:

$\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	9	15	21

5	5	15	25	35
7	7	21	35	49

Dengan memperhatikan tabel 1, terlihat bahwa polanya adalah bilangan ganjil apabila dikalikan dengan bilangan ganjil hasilnya juga bilangan ganjil. Oleh karena itu dapat diduga (digeneralisasikan) bahwa bilangan ganjil apabila dikalikan dengan bilangan ganjil hasilnya adalah bilangan ganjil.

Seperti telah dikemukakan sebelumnya bahwa dalam matematika, generalisasi tersebut tidak dibenarkan dan perlu dibuktikan secara deduktif. Untuk membuktikan secara deduktif, perlu pengertian bilangan genap dan bilangan ganjil sebagai berikut :

Definisi 1

(1). Bilangan bulat m dikatakan bilangan genap apabila terdapat bilangan bulat k sehingga berlaku $m = 2k$.

(2). Bilangan bulat m dikatakan bilangan ganjil apabila terdapat bilangan bulat k sehingga berlaku $m = 2k + 1$.

Bukti generalisasi Contoh 2.3.
Ambil sembarang dua buah bilangan ganjil m dan n. Akan dibuktikan bahwa $m \times n$ bilangan ganjil. Karena m bilangan ganjil maka terdapat bilangan bulat k sehingga $m = 2k + 1$, dan juga karena n bilangan ganjil maka terdapat bilangan bulat p sehingga $n = 2p + 1$. Selanjutnya diperoleh :

$m \times n = (2k + 1) \times (2p + 1) = 4kp + 2k + 2p + 1 = 2(2kp + k + p) + 1 = 2r + 1$, dengan $r = 2kp + k + p$.

Karena 2, k dan p masing-masing bilangan bulat maka $r = 2kp + k + p$ juga bilangan bulat, sebab penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat bersifat tertutup.

Jadi terdapat bilangan bulat r sehingga $m \times n = 2r + 1$. Dengan kata lain $m \times n$ merupakan bilangan ganjil.

Matematika merupakan bidang ilmu yang dalam melakukan penalaran bukan berdasarkan induktif, tetapi bersifat deduktif sebab penurunan suatu teorema tidak didasarkan pada observasi umum tetapi berdasarkan definisi, aksioma, dan teorema-teorema yang telah ada sebelumnya. Satu hal yang perlu diperhatikan bahwa pola induktif hanya digunakan sebagai pendekatan pembelajaran matematika untuk tingkat SD. Namun seiring dengan perkembangan berdasarkan teori Jean Piaget, pola berpikir anak akan secara perlahan terbentuk secara abstrak, tidak tergantung lagi terhadap benda-benda kongrit dalam mengembangkan konsepnya.

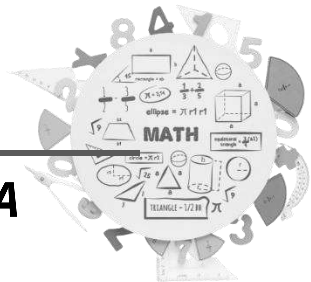
D. RANGKUMAN

1. Penalaran induktif adalah proses berpikir untuk menarik kesimpulan yang bersifat umum melalui pernyataan-pernyataan yang bersifat khusus.
2. Penalaran deduktif merupakan proses berpikir untuk menarik kesimpulan yang berlangsung dari hal yang umum ke hal yang khusus.
3. Langkah-langkah penalaran yang umum yaitu mengamati pola, membuat dugaan, melakukan generalisasi dan membuktikan dengan deduktif.

E. LATIHAN

1. Diskusikan dengan teman Anda untuk menentukan contoh penggunaan penalaran induktif dan deduktif dalam kehidupan sehari-hari.
2. Diskusikan dengan teman Anda, penalaran mana yang cocok untuk diterapkan pada pembelajaran matematika di Sekolah Dasar, penalaran induktif atau deduktif?
3. Diskusikan dengan teman Anda untuk menentukan contoh penggunaan penalaran induktif dalam pembelajaran matematika di Sekolah Dasar.
4. Secara induktif, tentukan pola umum (generalisasi) yang mungkin berlaku pada deret 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2*n*, untuk setiap bilangan asli *n*. Kemudian tentukan jumlah dari 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 200.
5. Secara induktif, tentukan pola umum (generalisasi) yang mungkin berlaku pada deret $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\cdots$, untuk setiap bilangan asli n. Kemudian tentukan jumlah dari $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{50.51}=\cdots$.
6. Untuk soal 3 + 8 dengan 8 + 3 bagi siswa kelas I SD manakah soal yang dianggap lebih mudah? Berikan alasannya.
7. Buktikan bahwa bilangan ganjil ditambah bilangan ganjil adalah bilangan genap!

BAB 3



LOGIKA MATEMATIKA

PENDAHULUAN

Logika adalah dasar dan alat berpikir yang logis dalam matematika dan pelajaran-pelajaran lainnya, sehingga dapat membantu dan memberikan bekal tambahan untuk mempelajari bidang yang lain. Dalam Logika dipelajari metode-metode dan prinsip-prinsip yang dapat dipakai untuk membedakan cara berpikir benar (correct) atau tidak benar (incorrect), sehingga dapat membantu menyatakan ide-ide tepat dan tidak mempunyai arti ganda. Jadi, dalam ilmu logika hanya mempelajari atau memperhatikan kebenaran dan kesalahan dari penalaran, dan penarikan kesimpulan dari sebuah pernyataan atau lebih.

Secara teoritis belajar logika adalah tidak hanya belajar bagaimana menalar dengan benar, melainkan juga mengenal bentuk-bentuk penarikan kesimpulan yang absah. Simbol-simbol dalam logika, seperti juga dalam bidang matematika lainnya merupakan sarana yang penting untuk melakukan penalaran.

A. PERNYATAAN

Aktivitas:

Perhatikan kalimat-kalimat berikut:

1. Sebuah segiempat mempunyai empat sisi
2. Ibukota provinsi Jawa Tengah adalah Semarang
3. Apakah Ratih berada di rumahmu?
4. Alangkah indahnya lukisan ini!
5. Makassar adalah ibukota provinsi Sulawesi Tenggara
6. Tutuplah pintu itu!
7. Semoga anda lekas sembuh

Dari kalimat-kalimat diatas:

a. Sebutkan jenis kalimat-kalimat tersebut!
b. Kalimat mana saja yang merupakan pernyataan
c. Bagaimana ciri-ciri kalimat yang merupakan pernyataan.

B. KALIMAT TERBUKA

Kalimat terbuka adalah kalimat yang belum dapat ditentukan nilai kebenaraanya. Ciri dasar kalimat terbuka adalah adanya peubah atau variabel.

Contoh 3.1:

a. $2x - 5 = 9$
b. $3 + n$ adalah bilangan prima
c. Kota A adalah ibukota provinsi Sulawesi Selatan

C. PERNYATAAN

Pernyataan adalah suatu kalimat yang mempunyai nilai logika (kebenaran) benar saja atau salah saja dan tidak duanya. Istilah-istilah lain dari pernyataan adalah kalimat matematika tertutup, kalimat tertutup, kalimat deklaratif, statement atau proposisi.

Setiap pernyataan adalah sebuah kalimat, tetapi suatu kalimat belum tentu suatu pernyataan. Hanyalah kalimat-kalimat yang bersifat "menerangkan sesuatu" (*kalimat deklaratif*) yang dapat digolongkan sebagai pernyataan. Akan tetapi, tidak semua kalimat yang menerangkan sesuatu dapat digolongkan sebagai pernyataan.

Contoh 3.2:

Suatu pernyataan dan nilai kebenarannya.

1. Bangun datar segiempat memiliki empat titik sudut. (benar)
2. 2 adalah bilangan prima (benar)
3. 5 – 7 = 2 (salah)
4. Segitiga sama sisi memiliki tiga sudut yang sama besar. (benar)

Contoh 3.3:

Bukan pernyataan

1. Bukalah pintu itu!
2. *x* lebih besar dari 3 (*x*adalah variabel yang menunjukkan bilangan).
3. Apakah ariefat sudah makan?

Suatu pernyataan dinotasikan dengan huruf kecil seperti p, q, r dsb.

Misalnya:

P: Semua bilangan prima adalah ganjil

q: Jakarta ibukota Indonesia

Ada 2 dasar untuk menentukan nilai kebenaran suatun pernyataan yaitu :

a. Dasar empiris: jka nilai kebenaran ditentukan dengan pengamatan pada saat tertentu.

Contoh 3.4:

* Rambut adik panjang
* Besok pagi cuaca cerah

b. Dasar tidak empiris: jka nilai kebenaran ditentukan menurut kaidah atau hukum tertentu. Jadi nilai mutlak tidak terikat oleh waktu dan tempat.

Contoh 3.5:

* Jumlah sudut dalam segitiga adalah 180^0
* Gunung Latimojong terletak di Kabupaten Enrekang

D. INGKARAN DARI PERNYATAAN

Ingkaran atau negasi dari suatu pernyataan adalah pernyataan yang mengingkari pernyataan semula. Ingkaran dari pernyataan p dinotasikan ~ p dibaca " bukan p" atau "tidak p".

Contoh 3.6:

a. p : Ibu pergi ke pasar
   ~ p : Ibu tidak pergi ke pasar
b. q : $2 + 7 < 10$
   ~ q : $2 + 7 \geq 10$
c. r : $7 – 3 = 4$
   ~ r : $7 – 3 \neq 4$

E. PERNYATAAN TUNGGAL DAN MAJEMUK

Suatu kalimat selain dibedakan atas pernyataan dan bukan pernyataan, kalimat juga dibedakan pula atas pernyataan tunggal dan pernyataan majemuk. Pernyataan tunggal atau pernyataan sederhana adalah pernyataan yang tidak memuat pernyataan lain atau sebagai bagiannya, sedangkan pernyataan majemuk dapat merupakan kalimat baru yang diperoleh dengan cara menggabungkan beberapa pernyataan tunggal.

Dua pernyataan tunggal atau lebih dapat digabungkan menjadi sebuah kalimat baru yang merupakan pernyataan majemuk, sedangkan tiap pernyataan bagian dari pernyataan majemuk disebut komponen-komponen pernyataan majemuk. Komponen-komponen dari pernyataan majemuk itu tidak selamanya harus pernyataan tunggal, tetapi mungkin saja pernyataan majemuk. Namun yang terpenting adalah bagaimana menggabungkan pernyataan-pernyataan tunggal menjadi pernyataan majemuk.

Untuk menggabungkan pernyataan-pernyataan tunggal menjadi pernyataan majemuk dapat dipakai kata gabung atau kata perangkai yang disebut operasi-operasi logika matematika.

Contoh 3.7:

1. Merah putih adalah bendera negara RI
2. 2 adalah bilangan prima yang genap
3. Jika suatu bilangan habis dibagi dua maka bilangan itu genap

F. TABEL KEBENARAN PERNYATAAN

Tabel kebenaran adalah suatu tabel yang memuat nilai kebenaran pernyataan-pernyataan tunggal atau pernyataan-pernyataan majemuk. Untuk melengkapi tabel kebenaran pernyataan, harus diketahui dulu berapa banyak pernyataan yang termuat yang berlainan dalam tabel tersebut. Langkah ini diperlukan agar tidak ada kemungkinan komposisi nilai kebenaran yang mungkin tidak tertuliskan.

Contoh 3.8:

Jika terdapat dua pernyataan berlainan, maka kemungkinan-nya adalah:

1. Pernyataan pertama benar, pernyataan kedua benar
2. Pernyataan pertama benar, pernyataan kedua salah
3. Pernyataan pertama salah, pernyataan kedua benar
4. Pernyataan pertama salah, pernyataan kedua salah

Berarti ada empat komposisi pernyataan jika terdiri dari dua pernyataan yang berlainan. Dalam bentuk tabel kebenaran sebagai berikut:

p	q
B	B
B	S
S	B
S	S

Jika diperhatikan, ternyata dua pernyataan mempunyai 4 kemungkinan komposisi. Jadi, banyaknya komposisi itu tergantung pada banyaknya pernyataan yang akan digabungkan. Secara umum berlaku jika banyaknya pernyataan ada n, maka banyaknya komposisi adalah 2^n.

Contoh 3.9:

Jika ada 3 pernyataan yang akan digabungkan maka banyaknya pernyataan yang dapat dibuat adalah $2^3 = 8$. Dalam bentuk tabel kebenaran:

p	q	s
B	B	B
B	B	S
B	S	B
B	S	S

S	B	B
S	B	S
S	S	B
S	S	S

G. OPERASI LOGIKA

Suatu pernyataan hanyalah bisa benar saja atau salah saja. Kebenaran atau kesalahan dari suatu pernyataan disebut nilai kebenaran dari pernyataan itu. Untuk pernyataan yang mempunyai nilai benar diberi tanda huruf kapital B, sedangkan untuk pernyataan yang mempunyai nilai salah diberi tanda huruf kapital S. Telah diuraikan sebelumnya bahwa pernyataan terdiri dari pernyataan tunggal dan pernyataan majemuk. Pernyataan majemuk adalah pernyataan yang terdiri dari gabungan beberapa pernyataan tunggal. Untuk lebih memahami bentuk pernyataan majemuk perhatikan beberapa contoh berikut:

1. Hari ini terjadi hujan atau panas
2. 13 adalah bilangan prima dan bilangan ganjil
3. Jika malam nanti cerah maka saya akan datang ke rumahmu
4. Suatu segitiga adalah sama sisi jika dan hanya jika ketiga sudutnya sama besar.
5. Ibu membeli baju dan sepatu untuk adik

Untuk menggabungkan pernyataan-pernyataan tunggal menjadi pernyataan majemuk dapat dipakai kata gabung atau kata perangkai yang disebut operasi-operasi logika matematika. Adapun operasi-operasi yang dapat membentuk pernyataan majemuk adalah:

1. Negasi/ingkaran, dengan kata perangkai tidaklah benar, simbol “ ~ “
2. Konjungsi, dengan kata perangkai dan, simbol “ $\wedge$ “

3. Disjungsi, dengan kata perangkai atau, simbol " $\vee$ "
4. Implikasi, dengan kata perangkai Jika ..., maka ...., simbol " $\Rightarrow$ "
5. Biimplikasi, dengan kata perangkai ...jika dan hanya jika, simbol " $\Leftrightarrow$ "

H. KONJUNGSI

Suatu pernyataan majemuk yang dibentuk dengan cara menggabungkan dua pernyataan tunggal dengan memakai kata perangkai "dan" disebut konjungsi. Operasi konjungsi dilambangkan dengan " $\wedge$ "

Definisi: Sebuah konjungsi bernilai benar jika komponen-komponennya bernilai benar, dan bernilai salah jika salah satu dari komponennya bernilai salah

Definisi diatas dapat ditulis dalam tabel kebenaran sbb:

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Contoh 3.10:

p : diagonal-diagonal persegi saling berpotongan tengak lurus.

q : diagonal persegi sama panjang

$p \wedge q$: diagonal-diagonal persegi saling berpotongan tengak lurus dan diagonal persegi sama panjang

pernyataan $p \wedge q$ bernilai benar sebab p bernilai benar dan q bernilai benar.

I. DISJUNGSI

Suatu pernyataan majemuk yang dibentuk dengan cara menggabungkan dua pernyataan tunggal dengan memakai kata perangkai atau disebut disjungsi. Operasi disjungsi dilambangkan dengan " $\vee$ "

Definisi: Sebuah disjungsi inklusif bernilai benar jika paling sedikit salah satu komponennya bernilai benar, sedangkan disjungsi eksklusif bernilai benar jika paling sedikit komponennya bernilai benar tetapi tidak kedua-duanya.

Definisi diatas dapat ditulis dalam tabel kebenaran sbb:

Disjungsi Inklusif:

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Disjungsi Eksklusif:

p	q	$p \veebar q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Contoh 3.11:

Disjungsi inklusif : seseorang yang boleh melamar CPNS adalah warga Negara Indonesia lulus SMA atau yang sederajat.

Disjungsi eksklusif : saya berada dirumah atau disekolah

J. IMPLIKASI

Suatu pernyataan majemuk yang dibentuk dengan cara menggabungkan dua pernyataan tunggal dengan memakai kata perangkai "Jika Maka" disebut implikasi disimbolkan dengan " $\Rightarrow$ "

Definisi: Sebuah pernyataan implikasi hanya salah jika antesedennya benar dan konsekwennya salah, dalam kemungkinan lainnya implikasi bernilai benar.

Pernyataan majemuk "jika p maka q" yang dibentuk dari pernyataan p dan q disebut implikasi dan dituliskan $p \Rightarrow q$.

Pernyataan $p \Rightarrow q$ dapat dibaca:

- Jika p, maka q.
- p mengimplikasi q .
- q hanya jika q .
- q jika p.
- q asal saja p
- p adalah syarat cukup untuk q .
- q adalah syarat perlu untuk p .

Definisi tersebut dapat ditulis dalam tabel kebenaran sbb:

P	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Contoh 3.12:

p : 11 adalah bilangan prima

q : Jumlah sudut-sudut dalam segitiga 180^0

$p \Rightarrow q$: jika 11 adalah bilangan prima maka jumlah sudut-sudut dalam segitiga 180^0

K. BIIMPLIKASI

Suatu pernyataan majemuk yang dibentuk dengan cara menggabungkan dua pernyataan tunggal dengan memakai kata perangkai ... jika dan hanya jika... disebut biimplikasi. Operasi biimplikasi dilambangkan dengan " $\Leftrightarrow$ "

Definisi: Sebuah pernyataan biimplikasi bernilai benar jika komponen-komponennya mempunyai nilai kebenaran sama, dan jika komponen-komponennya mempunyai nilai kebenaran tidak sama maka biimplikasi bernilai salah.

Definisi diatas dapat ditulis dalam tabel kebenaran sbb:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh 3.13:

p : Segitiga *ABC* adalah segitiga sama sisi

q : Ketiga sisi segitiga *ABC* sama panjang

$p \Leftrightarrow q$: Segitiga *ABC* adalah segitiga sama sisi jika dan hanya jika ketiga sisi segitiga *ABC* sama panjang

L. BENTUK-BENTUK PERNYATAAN

1. Tautologi, Kontradiksi, dan Kontegensi

a. Tautologi

Jika nilai kebenaran pernyataan majemuk adalah benar dalam segala hal, tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponennya. Dalam tabel kebenaran, suatu tautologi selalu bernilai benar (B) pada setiap barisnya.

b. Kontradiksi

Jka suatu pernyatan majemuk dengan nilai kebenaran pernyataannya salah dalam segala hal, tanpa memandang komponen-komponennya. Dalam tabel kebenaran, suatu kontradiksi selalu bernilai salah (S) pada setiap barisnya.

c. Kontigensi

Suatu pernyataan majemuk tidak harus mempunyai nilai kebenaran selalu benar atau selali salah untuk segala hal. Bisa jadi pernyataan majemuk itu mempunyai nilai kebenaran benar pada suatu situasi dan mempunyai nilai kebenaran salah pada situasi yang lain. Secara umum, sebuah pernyataan majemuk dinamakan kontigensi, jika nilai kebenarannya merupakan kumpulan nilai benar dan salah diluar tautologi dan kontradiksi.

Contoh 3.14:

Selidiki pernyataan di bawah ini apakah suatu tautologi, kontradiksi atau kontingensi! $(\sim p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$q \rightarrow p$	$(\sim p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$
B	B	S	S	B	B

B	S	S	S	B	B
S	B	B	B	S	B
S	S	B	S	B	B

Karena pada tabel kebenaran di atas benar semua, maka pernyataan di atas suatu tautologi

2. Implikasi Logis dan Ekuivalen Logis

Suatu bentuk pernyataan implikasi yang merupakan tautologi disebut implikasi logis.

Contoh 3.15:

Selidikilah apakah bentuk pernyataan majemuk $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow p$ merupakan implikasi logis atau bukan.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow p$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Dua atau lebih pernyataan majemuk yang mempunyai nilai kebenaran sama disebut ekwivalen logis dengan notasi " $\equiv$ " atau " $\approx$ "

Contoh 3.16:

Selidikilah apakah bentuk pernyataan majemuk $p \leftrightarrow q$ ekivalen logis dengan

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
B	B	B	B	B	B

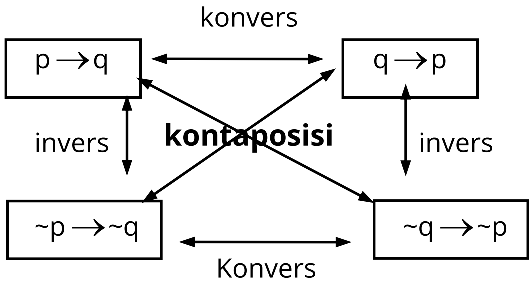
B	S	S	S	B	S
S	B	S	B	S	S
S	S	B	B	B	B

Karena $p \leftrightarrow q$ mempunyai nilai kebenaran sama dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, maka kedua pernyataan majemuk di atas disebut ekwivalen logis.
Jadi, $p \leftrightarrow q \approx (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

3. Konvers, Invers dan Kontraposisi

- Jika suatu bentuk implikasi $p \rightarrow q$ diubah menjadi $q \rightarrow p$ disebut konvers
- Jika suatu bentuk implikasi $p \rightarrow q$ diubah menjadi $\sim p \rightarrow \sim q$ disebut invers
- Jika suatu bentuk implikasi $p \rightarrow q$ diubah menjadi $\sim q \rightarrow \sim p$ disebut kontraposisi

Adapun skema konvers, invers dan kontraposisi dapat dilihat sbb:



Contoh 3.17:
Carilah konvers, invers dan kontraposisi dari pernyataan:

" Jika binatang itu bertubuh besar maka binatang itu disebut gajah "

Konvers : *Jika binatang itu disebut gajah maka binatang Itu bertubuh besar*

Invers : *Jika binatang itu tidak bertubuh besar maka binatang itu bukan gajah*

Kontraposisi : *Jika binatang itu bukan gajah maka binatang itu tidak bertubuh besar*

Silahkan anda mencoba soal berikut untuk lebih memahami konvers, invers dan kontraposisi:
Buatlah konvers, invers dan kontraposisi dari pernyataan berikut dan tentukan nilai kebenarannya.

1. Jika dua buah garis saling tegak lurus maka kedua garis itu membentuk sudut siku-siku
2. Jika x = 3 maka $x^2 = 9$

M. KUANTOR

Suatu Kuantor adalah suatu ucapan yang apabila dibubuhkan pada suatu kalimat terbuka akan mengubah kalimat terbuka tersebut menjadi suatu kalimat tertutup atau pernyataan.

Kuantor dibedakan atas:

1. **Kuantor Universal** / Umum (Universal Quantifier), notasinya : " $\forall$ "

   Misalkan *p(x)* adalah suatu kalimat terbuka, dengan *x* anggota himpunan semesta pembicaraan *S*

   Pernyataan : $(\forall x \in S)\, p(x)$ *atau* $(\forall x)\, p(x)$

   Dibaca "untuk setiap x, berlaku *p(x)*"

   Penggunaaan kata "untuk setiap" pada kuantor universal senilai dengan kata "untuk semua", untuk tiap-tiap", dan "untuk seluruhnya"

Contoh 3.18:

1. Tuliskan kalimat “untuk setiap *n* anggota himpunan bilangan asli *N*, berlaku n anggota himpunan bilangan real *R*” dengan notasi matematika
2. Jika semesta pembicaraannya bilangan real *R*, tentukan nilai kebenaran dari $(\forall x)(x+3<6)$

Jawab:

1. $(\forall n)\, n \in N \rightarrow n \in R$
2. $(\forall x)(x+3<6)$ bernilai salah. Karena ada nilai *x* yang tidak memenuhi, misalnya *x = 4*. Akibatnya, 4 + 3 < 6 (bernilai salah). Dengan demikian tidak berlaku untuk setiap $x \in R$

2. Kuantor Khusus (Kuantor (Eksistensial Quantifier), notasinya : “ ∃ “

Misalkan *p(x)* adalah suatu kalimat terbuka pada suatu himpunan semesta pembicaraan *S*

Pernyataan $(\exists x \in S)\, p(x)\ atau\ (\exists x)\, p(x)$

Dibaca “terdapat *x* sehingga *p(x)*”

Kata “terdapat” senilai dengan kata “ada”, “beberapa”, “untuk suatu”, dan “untuk paling sedikit satu”

Contoh 3.19:

Tentukan nilai kebenaran dari kalimat berkuantor eksistensial berikut jika *x* dan *y* adalah anggota himpunan bilangan real *R.*

a. $(\exists x)(x^2-6x+8=0)$

b. $(\exists x)(\exists y)(x^2+2y\leq 3)$

Jawab:

a. $(\exists x)(x^2 - 6x + 8 = 0)$ bernilai benar. Misalnya diambil *x = 2* atau *x = 4*

b. $(\exists x)(\exists y)(x^2 + 2y \leq 3)$ bernilai benar. Misalnya diambil *x =1* dan *y = 1*

N. NEGASI PERNYATAAN BERKUANTOR

Negasi pernyataan *"Semua manusia akan mati"* adalah *"Tidak benar bahwa semua manusia akan mati"* atau *"Beberapa manusia tidak akan mati"***.** Negasi pernyataan *"Beberapa manusia memakai baju putih"* adalah *"Tidak benar bahwa beberapa manusia memakai baju putih"* atau *" Semua manusia tidak memakai baju putih"*.

Dengan demikian, jika dituliskan secara simbolik adalah:

∀ x p(x) <u>negasinya</u> ∃x ~ p(x)
∃x p(x) <u>negasinya</u> ∀x ~ p(x)
∀ x ∃y p(x,y) <u>negasinya</u> ∃x ∀y ~ p(x,y)
∃x ∀y p(x,y) <u>negasinya</u> ∀x ∃y ~ p(x,y)

Contoh 3.20:

1. Negasi dari pernyataan: " Semua mahasiswa tidak mengerjakan tugas " adalah " Ada mahasiswa yang mengerjakan tugas "

   Jika diberikan notasi, maka pernyataan di atas menjadi:

   ∀ x, M(x) $\rightarrow \overline{T(x)}$, negasinya ∃ x, M(x) $\wedge$ T(x)

2. Tentukan negasi dari kalimat berkuantor $(\forall x)(\exists y)(x^2 + y^2 < 25)$

   Jadi negasinya adalah $(\exists x)(\forall y) \sim (x^2 + y^2 < 25)$ atau

   $(\exists x)(\forall y)(x^2 + y^2 \geq 25)$

O. PENARIKAN KESIMPULAN

1. Argumen

Argumen merupakan kumpulan pernyataan-pernyataan yang dikelompokkan dalam dua bagian yaitu premis dan konklusi. Premis tersusun atas pernyataan-pernyataan yang digunakan sebagai data untuk menghasilkan pernyataan baru berupa konklusi atau kesimpulan.

Contoh 3.21:

1) Jika bilangan dan logika diperlukan maka semua mahasiswa belajar matematika
2) Bilangan dan logika diperlukan

$\therefore$ semua manusia belajar matematika

Pernyataan (1) dan (2) merupakan premis, sedangkan $\therefore$ merupakan kesimpulan dari argument tersebut.

Contoh 3.22:

Jika kita makan nasi satu piring maka perut kita kenyang, dan jika kita minum air jeruk satu gelas maka badan kita segar. Jadi kita makan nasi satu piring dan minum air jeruk satu gelas maka perut kita kenyang dan badan kita segar.

Tentukan premis dan konklusi dari argument tersebut.

Suatu argumen dikatakan valid apabila untuk sembarang pernyataan-pernyataan yang ada dalam premis benar maka kesimpulannya juga benar. Sebaliknya, meskipun semua premis benar tetapi ada kesimpulan yang salah maka argument tersebut dikatakan tidak valid. Dengan kata lain, penarikan kesimpulan dikatakan valid jika kebenaran konjungsi pernyataan-pernyataan yang ada pada premis mengakibatkan secara logic kebenaran konklusi.

Bukti Keabsahan Argumen

Bukti keabsahan argumen dapat melalui:

1. Tabel Kebenaran
2. Aturan Penyimpulan

Untuk argumen sederhana atau argumen yang premis-premisnya hanya sedikit bukti keabsahan argumen dapat menggunakan tabel kebenaran, namun untuk argumen yang premis-premisnya kompleks harus menggunakan aturan-aturan yang ada pada logika diantaranya aturan penyimpulan.

Tabel Kebenaran

Contoh 3.23:

Buktikan keabsahan argumen

a. 1. $p \rightarrow q$
   2. $\sim q$ / $\therefore \sim p$

b. 1. $a \rightarrow b$
   2. $c \rightarrow d$
   3. $(\sim b \vee \sim d) \wedge (\sim a \vee \sim b)$/ $\therefore \sim a \vee \sim c$ (latihan)

Bukti:

menggunakan tabel kebenaran

p	q	~p	~q	$p \rightarrow q$	$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q]$	$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B

Karena dari tabel kebenaran di atas menunjukkan tautologi, maka argumen sah atau valid

Aturan Penyimpulan

1. Modus Ponens (MP)

   $p \rightarrow q$

   $p \;/ \therefore\; q$

2. Modus Tolens (MT)

   $p \rightarrow q$

   $\sim q \;/ \therefore \sim p$

3. Hypothetical Syllogisme (HS)

   $p \rightarrow q$

   $q \rightarrow r \;/ \therefore p \rightarrow r$

4. Disjunctive Syllogisme (DS)

   $p \vee q$

   $\sim p \;/ \therefore\; q$

5. Constructive Dillema (CD)

   $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$

   $p \vee r \;/ \therefore q \vee s$

6. Destructive Dillema (DD)

   $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$

   $\sim q \vee \sim s \;/ \therefore \sim p \vee \sim r$

7. Conjunction (Conj)

   p

   $q \;/ \therefore p \wedge q$

8. Simplification (Simpl)

   $p \wedge q$

   $\therefore p$

9. Addition (Add)

   p

   $\therefore p \vee q$

Aturan Penggantian

1. De Morgan
   a. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
   b. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
2. Komutatif
   a. $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
   b. $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
3. Asosiatif
   a. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
   b. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
4. Distributif
   a. $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
   b. $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
5. Dobel Negasi
   $\sim(\sim p) \equiv p$
6. Implikasi
   $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
7. Material Equivalen
   a. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
   b. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
8. Eksportasi
   $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$
9. Transposisi
   $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
10. Tautologi
    a. $(p \vee p) \equiv p$
    b. $(p \wedge p) \equiv p$

Namun, dari aturan penyimpulan dan aturan penganti yang sering digunakan dalam penarikan kesimpulan adalah modus ponens, modus tollens, dan modus silogisme.

(1) Modus Ponens

Modus ponens merupakan salah satu bentuk aturan penyimpulan yang bentuk argumennya:

$p \rightarrow q$

p / $\therefore q$

jika dinyatakan dalam implikasi maka argumen tersebut adalah

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ yang nilai kebenarannya merupakan tautologi.

Contoh 3.24:

1) Jika lampunya terang, maka Aldi dapat membaca dengan jelas
   Lampunya terang
   Karena itu, Aldi dapat membaca dengan jelas
2) Jika lampunya terang, maka Aldi dapat membaca dengan jelas
   Aldi dapat membaca dengan jelas
   Karena itu, lampunya terang
3) Jika lampunya terang, maka Aldi dapat membaca dengan jelas
   Lampunya tidak terang
   Karena itu, Aldi tidak dapat membaca dengan jelas

Dari ketiga argumen tersebut, selidiki yang mana merupakan argumen yang valid (sah)!

(2) Modus Tollens

Modus tollens juga merupakan salah satu bentuk dari aturan penyimpulan yang bentuk argumennya

$p \rightarrow q$

~q / ∴~p

jika dinyatakan dalam bentuk implikasi maka argumen tersebut adalah

$[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$ yang nilai kebenarannya dalam bentuk tautologi.

Contoh 3.25:

1) Jika membayar pajak tidak terlambat maka tidak akan kena denda
   Kena denda
   Berarti membayar pajak
2) Jika membayar pajak tidak terlambat maka tidak kena denda
   Membayar pajak terlambat
   Karena itu, kena denda

Dari kedua argumen tersebut, selidiki yang mana merupakan argumen yang valid.

(3) Modus Silogisme

Silogisme merupakan sebuah konsep pengambilan kesimpulan dengan menggunakan aturan rantai yaitu:

p →q

q →r / ∴p →r

bentuk implikasi dari silogisme adalah $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ yang merupakan tautologi.

Contoh 3.26

1) Jika hari ini ibu ke pasar, maka ibu beli ikan
   $p \Rightarrow q$
   Jika ibu beli ikan, maka ibu memasak ikan
   $q \Rightarrow r$
   Jika ibu memasak ikan, maka ibu tidak membuat kue
   $r \Rightarrow s$

Hari ini ibu ke pasar

p

Karena itu, ibu tidak membuat kue

$\therefore s$

Penyelesaian:

Misalkan:

(1) $p \Rightarrow q$

(2) $q \Rightarrow r$

(3) $r \Rightarrow s$

(4) p

(5) $\therefore s$

Dari (1) dan (2) diperoleh dengan modus silogisme yaitu $p \Rightarrow r$

Dari $p \Rightarrow r$ dengan (3) dengan modus silogisme diperoleh $p \Rightarrow s$

Dari $p \Rightarrow s$ dengan (4) dengan modus ponens diperoleh s

Jadi argumen tersebut adalah valid.

2) Jika hari ini ibu ke pasar, maka ibu membeli ikan
Jika ibu membeli ikan, maka ibu memasak ikan
Jika ibu memasak ikan, maka ibu tidak membuat kue
Ibu membuat kue
Karena itu, hari ini ibu tidak ke pasar.

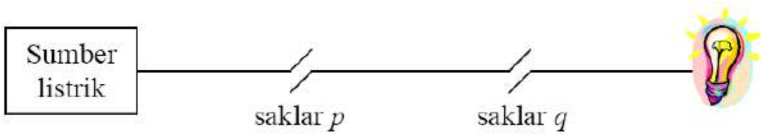
3) Jika hari ini ibu ke pasar, maka ibu membeli ikan
Jika ibu membeli ikan, maka ibu memasak ikan
Jika ibu memasak ikan, maka ibu tidak membuat kue
Ibu tidak membuat kue
Karena itu, hari ini ibu ke pasar

Selidiki keabsahaan argumen (2) dan (3)!

P. PENERAPAN LOGIKA MATEMATIKA

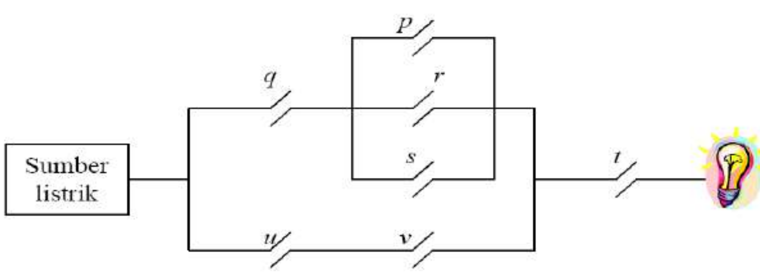
Logika matematika dengan nilai kebenarannya tidak hanya berguna untuk menetapkan besar atau salahnya pernyataan, tetapi secara pratis banyak aplikasi dalam kehidupan sehari-hari. Salah bentuk penerapan logika matematika dalam rangkaian listrik.

Secara umum rangkaian listrik yang sering kita jumpai dalam peralatan elektronik dibedakan menjadi dua yaitu rangkaian seri dan paralel. Pada rangkaian seri lampu akan menyala hanya apabila misalkan saklar p dan saklar q dalam posisi menyala (on), jika tidak lampu akan mati. Perhatikan ilustrasi berikut:



Rangkaian listrik seri merupakan konsep dari konjugsi ($p \wedge q$). Bagaimana dengan rangkaian paralel?

Tuliskan simbol logika dari rangkaian listrik berikut:



Q. RANGKUMAN

1. Pernyataan adalah kalimat matematika yang sudah jelas, sudah pasti benarnya atau salahnya dan tidak mempunyai dua arti. Oleh karena itu, nilai kebenaran dari pernyataan diberi benar (B) atau (S).
2. Pernyataan terdiri dari dua yaitu pernyataan tunggal dan pernyataan majemuk. Pernyataan majemuk adalah pernyataan yang mengandung pernyataan lain sebagai komponennya. Jadi, terdiri dari beberapa pernyataan.
3. Operasi logika terdiri dari konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi.
4. Bentuk-bentuk pernyataan terdiri dari tautologi, kontradiksi, kontigensi, konvers, invers, kontraposisi
5. Argumen merupkan kumpulan dari pernyataan-pernytaaan yang terdiri dari premis dan konklusi.
6. Untuk membuktikan keabsahan argumen, dalam melakukan penarikan kesimpulan yaitu dengan menggunakan tabel kebenaran dan aturan penyimpulan.
7. Penarikan kesimpulan yang sering digunakan adalah modus ponens, modus tollens, dan modus silogisme.

R. LATIHAN

1. Nyatakan kalimat-kalimat berikut merupakan kalimat terbuka atau pernyataan. jika pernyataan nyatakan nilai kebenaranya : $x + 2 = x - 2$ dan $2(x + 1)+ 3 = 2x +5$
2. Tuliskan negasi dari pernyataan 2 bilangan prima dan 2 +3 sama dengan 5
3. Tentukan nilai kebenaran dari 3 bilangan prima atau 5 bilangan genap dengan disjungsi
4. Tentukan nilai kebenaran dari 6 bilangan prima dan 3 bilangan ganjil dengan konjungsi
5. Tentukan nilai kebenaran jika $2 + 3 = 5$, maka $4 + 5 = 7$ dengan implikasi
6. Tentukan nilai kebenaran $2 + 2 = 4 \Leftrightarrow 3 + 4 = 8$
7. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari setiap pernyataan implikasi berikut :
   a. Jika harga BBM naik, maka harga kebutuhan sehari-hari naik
   b. Jika Carli siswa yang pandai, maka ia lulus tes
   c. Jika harga turun, maka permintaan naik
   d. Jika n^2 ganjil maka *n* ganjil
8. Selidiki apakah pernyataan-pernyataan di bawah ini suatu tautologi, kontradiksi atau kontingensi! $(p \vee q) \rightarrow (\sim p \rightarrow r)$
   a. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
   b. $(p \wedge q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$
   c. $(p \wedge q) \rightarrow p$
   d. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(\sim q \wedge r) \rightarrow (r \wedge p)]$
   e. $(p \vee q) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

f. $(p \wedge q) \Rightarrow q$

g. $q \wedge (p \wedge \sim q)$

9. Selidiki apakah pernyataan di bawah ini implikasi logis, ekwivalen logis atau tidak kedua-duanya
   a. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv [(p \rightarrow \sim q) \vee r]$
   b. $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow (p \vee q)$
   c. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \equiv [(p \wedge q) \rightarrow r]$
   d. $[(p \rightarrow q) \vee r] \rightarrow [(p \wedge \sim q) \vee r]$
   e. $[\sim (p \wedge q)] \equiv (p \rightarrow q)$

10. Buktikan keabsahan argumen di bawah ini!
    a. $j \rightarrow k$
    b. $(k \vee l) \rightarrow \sim (m \wedge n)$
    c. $(\sim m \vee \sim n) \rightarrow (o \Leftrightarrow p)$
    d. $(o \Leftrightarrow p) \rightarrow (q \wedge r)$ / $\therefore (l \vee k) \rightarrow (r \wedge q)$

11. Buatlah notasi untuk pernyataan berkuantor di bawah ini!
    1) Semua pedagang asongan adalah pejalan kaki (A(x), K(x))
    2) Ada mahasiswa yang tidak mengerjakan tugas (M(x), T(x))
    3) Beberapa mahasiswa lomba Porseni (M(x), L(x))

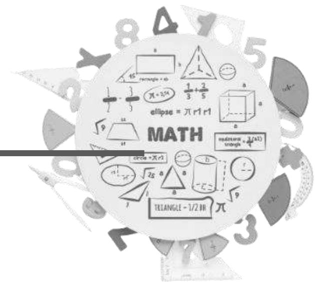
12. Jika p(x) kalimat terbuka: $x + 3 > 5$ maka nyatakan kedalam bentuk simbol pernyataan kuantor universal dan kuantir eksistensial

13. Jika $x \in$ bilangan bulat, maka tentukan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan di bawah ini!
    1) $(\forall x)(\exists y)(x + 2y = 7)$
    2) $(\exists x)(\exists y)(x + 2y = x)$
    3) $(\forall x)(\forall y)(x > y)$
    4) $(\exists x)(\exists y)(x.y = 1)$

14. Ubahlah kalimat di bawah ini ke dalam notasi logika!
    a. Tidak semua bunga mawar berwarna merah (B(x), M(x))
    b. Semua mahasiswa baru harus mendaftar ulang (M(x), U(x))
    c. Ada bilangan prima yang genap (P(x), G(x))
    d. Beberapa tamu yang datang pejabat negara (T(x), P(x))
    e. Tidak semua penumpang memiliki karcis (P(x), K(x))

15. Gambarkan rangkaian listrik untuk pernyataan-pernyataan berikut:
    $a. (p \wedge q) \vee p$
    b. $(p \vee q) \wedge p$
    c. $(p \vee (q \wedge r)) \vee ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

BAB 4



HIMPUNAN

PENDAHULUAN

Himpunan merupakan objek dasar dari semua objek yang dipelajari dalam matematika selain fungsi. Pada saat sesorang belajar matematika, mulai tingkat dasar sampai tingkat lanjut, selalu berhadapan dengan himpunan. Sebagai contoh, jika seorang siswa belajar tentang operasi penjumlahan bilangan bulat maka akan mempelajari tentang himpunan bilangan bulat dimana semua prosesnya dilakukan dalam ruang lingkup himpunan bilangan bulat.

George Cantor (1845 – 1918) adalah seorang ahli Matematika bangsa Jerman yang pertama kali mengembangkan teori himpunan. Pada permulaannya konsep mengenai himpunan bertahun-tahun tidak diterima, tetapi baru tahun 1920 pendapatnya itu dipertimbangkan oleh para ahli matematika pada waktu itu.

Teori himpunan pertama kali diperkenalkan di sekolah pada tahun 1960-an setelah era Sputnik. Pada tahun 1970-an banyak orang merasa bahwa symbol-simbol yang ada pada teori himpunan ini mengakibatkan kebingungan pada anak-anak maupun orang dewasa, khususnya bagi mereka yang baru mengenal symbol-simbol itu.

A. PENGERTIAN HIMPUNAN

Tidak semua konsep dalam matematika dapat didefinisikan secara tepat. Dalam matematika, himpunan merupakan pengertian pangkal (tidak didefinisikan, *undefined term*). Untuk memahaminya, himpunan sering diartikan sebagai kumpulan objek-objek (abstrak atau konkret) yang didefinisikan dengan jelas (*well defined*), jadi keanggotaannya harus jelas. Didefinisikan dengan jelas, berarti himpunan dapat mengklasifikasikan objek kedalam anggota atau bukan anggota himpunan itu.

Contoh 4.1: Yang termasuk himpunan:

- Kumpulan hewan-hewan berkaki dua.
- Kumpulan huruf vokal
- Kumpulan nama-nama mahasiswa UNM yang berusia di bawah 20 tahun

Contoh 4.2: Yang bukan merupakan himpunan:

- Kumpulan mobil yang bagus
- Kumpulan lukisan yang indah
- Kumpulan mahasiswi PGSD UNM yang cantik.

B. NOTASI DAN ANGGOTA HIMPUNAN

Himpunan biasanya dinyatakan dengan huruf kapital A, B, C, D, dan seterusnya. Untuk menyatakan suatu himpunan digunakan simbol "{....}". Sementara untuk melambangkan anggota (elemen) himpunan biasanya menggunakan huruf kecil *a, b, c, d,* dan seterusnya. Perlu diperhatikan bahwa penulisan anggota (elemen) dalam suatu himpunan hanya sekali saja Jadi tidak boleh kita menuliskan himpunan sebagai {1,*a*,*b*,8,*a*}. Demikian pula kita tidak boleh menyatakan himpunan sebagai {bunga, kambing, sapi, kerbau, sapi, tumbuhan}. Untuk menyatakan anggota (elemen) suatu himpunan digunakan lambang "$\in$" (baca: anggota / elemen) sedangkan untuk menyatakan bukan anggota suatu himpunan digunakan lambang "$\notin$" (baca: bukan anggota /elemen).

Contoh 4.3:

- Himpunan huruf vocal. V ={a, i, u, e, o}
- Himpunan bilangan asli. N = { 1, 2, 3,... }
- Himpunan bilangan bulat. Z = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }

C. CARA MENYATAKAN HIMPUNAN

Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan tiga cara sebagai berikut:

1. Dengan kata-kata.

   Dengan cara kata-kata artinya menyebutkan semua syarat/sifat keanggotaannya.

   Contoh 4.4:

   - N adalah himpunan bilangan asli yang dimulai dari 5 sampai 15
     Dituliskan dengan cara, N = {bilangan asli dari 5 sampai 15}
   - P adalah himpunan bilangan prima antara 10 dan 40,
     Ditulikan dengan cara, P = {bilangan prima antara 10 dan 20}.

2. Dengan Cara mendaftar anggota-anggotanya

   Dengan cara menyebutkan anggota-anggotanya, yaitu menuliskan semua angotanya dengan menggunakan kurung kurawal, dan anggota-anggotanya dipisahkan dengan tanda koma. Pada contoh (1.4) tersebut dapat dituliskan dengan cara mendaftar semua anggota-anggotannya, dapat kita lihat sebagai berikut

- N = {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}
- P = {11, 13, 17, 19}

3. Dengan notasi pembentuk himpunan.

   Dengan notasi pembentuk himpunan Sama seperti menyatakan himpunan dengan kata-kata dan cara mendaftar semua anggota-anggotannya, pada cara ini disebutkan semua syarat/sifat keanggotannya. Namun, anggota himpunan dinyatakan dengan suatu peubah. Peubah yang biasa digunakan adalah x atau y. Adapun beberapa penulisan dengan cara notasi namun mempunyai makna yang sama. Kita kembali melihat contoh (1.4) dan penjelasan penulisan himpunan dengan cara mendaftar anggota-anggotanya pada bagian 2 akan ditulikan dengan notasi pembentukan himpunan, dapat kita lihat sebagai berikut:

   - N = {x | $5 \leq x \leq 15$, x bilangan asli} atau ditulikan dengan notasi $N = \{x | 5 \leq x \leq 15, x \in N\}$, $N = \{x | 4 < x \leq 15, x \in N\}$, $N = \{x | 5 \leq x < 16, x \in N\}$, $N = \{x | 4 < x < 16, x \in N\}$
   - P = {x | $10 < x < 20$, x bilangan prima} atau dituliskan dengan notasi $P = \{x | 5 \leq x < 16, x \in P\}$

Lab Mini

Kegiatan 1: 

Dengan memperhatikan benda-benda yang terdapat di dalam ruangan maka kalian dapat menentukan beberapa kumpulan benda.

1. Daftarlah kumpulan benda:
   a. Benda-benda yang ada dalam ruangan
   b. Benda-benda yang ada dalam ruangan yang terbuat dari kayu
   c. Nama-nama teman dalam ruangan yang berkacamata
   d. Merek-merek HP temanmu yang paling mahal
   e. Nama-nama temanmu yang pandai

2. Dari kumpulan-kumpulan yang kalian daftar, tentukan yang mana himpunan dan bukan himpunan. Berikan alasanmu!

Kegiatan 2:

1. Perhatikan angka-angka dan symbol-simbol yang terdapat di kalkulator. Apakah angka-angka dan symbol-simbol tersebut mewakili suatu himpunan tertentu? Berikan pendapatmu!

2. Diketahui Himpunan A adalah tujuh bilangan asli pertama. Nyatakanlah himpunan A dengan cara:
   a. Mendaftar semua anggota-angootanya
   b. Menggunakan notasi himpunan
   c. Mengunakan kata-kata

D. MACAM-MACAM HIMPUNAN

1. Himpunan kosong

   Himpunan Kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota atau biasa dikenal dengan himpunan hampa, yang dinotasikan dengan { } atau ∅ (dinyatakan himpunan kosong). Secara teoritis, himpunan kosong adalah himpunan bagian dari setiap himpunan.

   Contoh 4.5:

   - A adalah himpunan manusia di bumi yang tingginya lebih dari 25 meter. Karena tidak ada manusia di bumi yang tingginya lebih dari 25 meter maka A = { }
   - N = {x│x adalah bilangan asli kurang dari 1}
   - P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka P = ∅

     Catatan: Perhatikan bahwa { 0 } tidak sama dengan { } atau { 0 } ≠ { }.

     { 0 } bukan himpunan kosong, sebab mempunyai anggota, yaitu 0.

     { } tidak mempunyai anggota, maka disebut himpunan kosong.

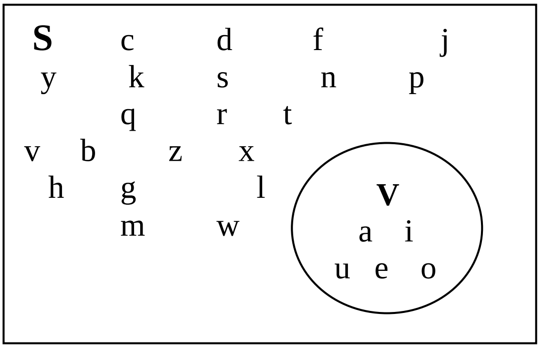
2. Himpunan Semesta

   Himpunan semesta adalah himpunan yang memuat semua anggota himpunan yang dibicarakan. Himpunn semesta disebut juga semesta pembicara atau himpunan universal. Lambang himpunan semesta adalah S atau U.

Contoh 4.6:

- S adalah himpunan huruf latin
  S = {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}
- V adalah himpunan huruf vokal V = {a,i,u,e,o}

Untuk memperjelas kedudukan sebuah himpunan dalam himpunan semesta atau untuk menggambarkan relasi antar himpunan, kita dapat menggunakan *diagram Venn*. Berikut contoh diagram Venn yang mempresentasikan kedudukan himpunan V *(himpunan huruf vokal)* dalam himpunan semesta *S (himpunan huruf latin)*.



3. Himpunan Berhingga dan Himpunan Tak Berhingga

   Himpunan dikatakan berhingga jika ia mempunyai anggota-anggota yang banyaknya berhingga. Sedangkan himpunan dikatakan tak berhingga jika himpunan tersebut mempunyai anggota-anggota yang banyaknya tak berhingga.

   Contoh 4.7:

   - R = $\{x \mid x =$ himpunan bilangan-bilangan cacah}

     Berarti anggotanya {0, 1, 3, ...}, jadi R disebut himpunan tak berhingga

- M = $\{x \mid x =$ himpunan bilangan-bilangan cacah kurang dari 5}
  Berarti anggotanya {0, 1, 3, 4}, jadi M disebut himpunan berhingga

  Perhatikan angka-angka dan symbol-simbol yang terdapat di kalkulator. Apakah angka-angka dan symbol-simbol tersebut mewakili suatu himpunan tertentu? Berikan pendapatmu!

Aktivitas:
Kegiatan 1:

Perhatikan angka-angka dan symbol-simbol yang terdapat di kalkulator. Apakah angka-angka dan symbol-simbol tersebut mewakili suatu himpunan tertentu? Berikan pendapatmu!

1. Daftarlah 5 himpunan kosong yang dapat dibentuk yang berada di sekitarmu
2. Tuliskan himpunan yang kalian daftar menggunakan notasi himpunan.

Kegiatan 2:

Jika diketahui: P = {pensil, buku}

Q = Himpunan bilangan prima yang kurang dari 6

R = { x | 5 < x < 8, x ∈ bilangan cacah}

1. Tentukan masing-masing 2 himpunan semesta yang mungkin dari himpunan P
2. Tentukan masing-masing 2 himpunan semesta yang mungkin dari himpunan Q
3. Tentukan masing-masing 2 himpunan semesta yang mungkin dari himpunan R

E. SIFAT-SIFAT OPERASI HIMPUNAN

1. Komutatif

Diberikan himpunan A dan B.

Maka berlaku $A \cup B = B \cup A$ dan juga $A \cap B = B \cap A$

2. Asosiatif

Diberikan himpunan A, B dan C.

Maka berlaku $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ dan juga $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3. Idempoten

Diberikan suatu himpunan A. Maka berlaku $A \cup A = A$ dan juga $A \cap A = A$

4. Identitas

Diberikan suatu himpunan A dalam semesta S.

Maka $A \cup S = A$ dan juga $A \cap S = A$

5. Distributif

Diberikan himpunan A,B dan C. Maka $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dan juga $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

6. Komplementer

Diberikan suatu himpunan A dalam semesta S. Maka $A \cup A^c = S$ dan $A \cap A^c = \varnothing$

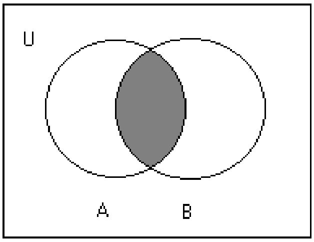
7. Dalil De Morgan

Diberikan himpunan A dan B.

Maka $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ dan $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

F. OPERASI HIMPUNAN

1. Irisan (*intersection*)



- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$

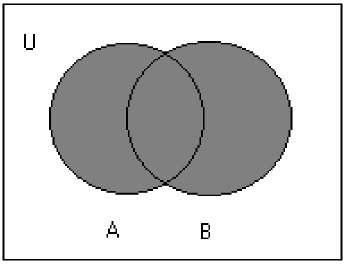
Contoh 4.8:

(i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$,
maka $A \cap B = \{4, 10\}$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka $A \cap B = \varnothing$.
Artinya: $A \,//\, B$

2. Gabungan (*union*)

- Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



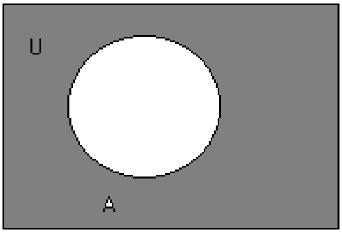
Contoh 4.9:

(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) (ii) $A \cup \varnothing = A$

3. Komplemen (*complement*)

- Notasi : $\overline{A}$ = { x | $x \in$ U, $x \notin A$ }



Contoh 4.10:

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

(i) Jika A = {1, 3, 7, 9}, maka $\overline{A}$ = {2, 4, 6, 8}

(ii) Jika A = { x | $x/2 \in P$, $x < 9$ }, maka $\overline{A}$ = { 1, 3, 5, 7, 9 }

Contoh 4.11:

Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri

B = himpunan semua mobil impor

C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990

D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta

E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

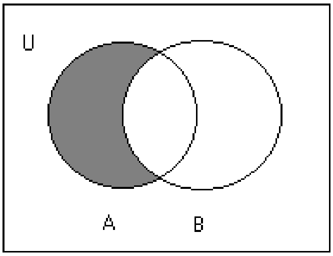
(i) "mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri" → $(E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$

(ii) "semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta" → $A \cap C \cap D$

(iii) "semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta" → $\overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

4. **Selisih (*difference*)**

- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



Contoh 4.12:

(i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$

(ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

5. **Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)**

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Contoh 4.13:

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6\}$ Contoh 4.14:

Misalkan :

U = himpunan mahasiswa

P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80

Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80\

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

- "Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" : $P \cap Q$
- "Semua mahasiswa yang mendapat nilai B" : $P \oplus Q$
- "Semua mahasiswa yang mendapat nilai C" : U – ($P \cup Q$)

Teorema. Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

6. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh 4.13:

1) Misalkan $C = \{1, 2, 3\}$, dan $D = \{a, b\}$, maka $C \times D = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$
2) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka $A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:

1) Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
2) Pasangan berurutan (a, b) berbeda dengan (b, a), dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$.
3) Perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.
   Pada Contoh 20(i) di atas, $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \neq C \times D$.
4) Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

Contoh 4.14:

Misalkan:

A = himpunan makanan = { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }

B = himpunan minuman = { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

Jawab:

$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ kombinasi dan minuman, yaitu $\{(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)\}$.

Contoh 4.15:

Daftarkan semua anggota himpunan berikut:

(a) $P(\varnothing)$ (b) $\varnothing \times P(\varnothing)$ c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing)$ (d) $P(P(\{3\}))$

Jawab:

(a) $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

(b) $\varnothing \times P(\varnothing) = \varnothing$ (ket: jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$ maka $A \times B = \varnothing$)

(c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing) = \{\varnothing\} \times \{\varnothing\} = \{(\varnothing, \varnothing))$

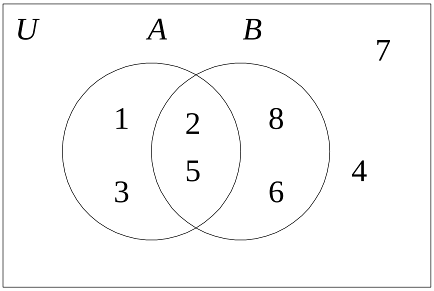
(d) $P(P(\{3\})) = P(\{ \varnothing, \{3\} \}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{3\}\}, \{\varnothing, \{3\}\} \}$

G. DIAGRAM VENN

Contoh 4.16:

Misalkan U = {1, 2, ..., 7, 8}, *A* = {1, 2, 3, 5} dan *B* = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:



H. KARDINALITAS

Kardinalitas Himpunan adalah bilangan yang menyatakan banyaknya anggota dari suatu himpunan dan dinotasikan dengan *n*(*A*)".

- Jumlah elemen di dalam *A* disebut kardinal dari himpunan *A*.
- Notasi: *n*(*A*) atau $|A|$

Contoh 4.17:

1. *B* = { *x* | *x* merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20 }, atau *B* = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} maka $|B|$ = 8
2. *T* = {kucing, *a*, Amir, 10, paku}, maka $|T|$ = 5
3. *A* = {*a*, {*a*}, {{*a*}} }, maka $|A|$ = 3

I. HUBUNGAN ANTAR HIMPUNAN

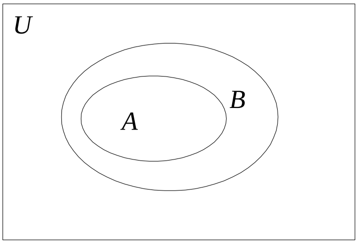
1. Himpunan Bagian (*Subset*)

a) Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B.

b) Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A.

c) Notasi: $A \subseteq B$

d) Diagram Venn:



Contoh 4.18:

1. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
3. $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$
4. Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq, y \geq 0 \}$ dan $B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0$ dan $y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

Teorema. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\varnothing \subseteq A$).

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

(e) $\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\varnothing$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A.

Contoh 4.19:

A = {1, 2, 3}, maka {1, 2, 3} dan $\varnothing$ adalah *improper subset* dari A.

e) $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

(i) $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.

A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.

Contoh 4.20:

{1} dan {2, 3} adalah *proper subset* dari {1, 2, 3}

(ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

2. Himpunan yang Sama

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.
- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.
- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 4.21:

(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

(b) jika $A = B$, maka $B = A$

(c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

3. Himpunan yang Ekivalen

- Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.
- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

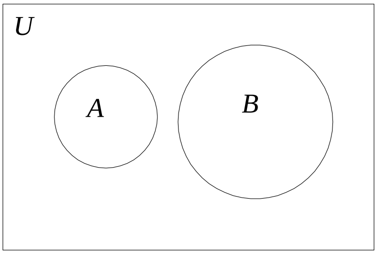
Contoh 4.22:

Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

4. Himpunan Saling Lepas

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

- Notasi : $A // B$
- Diagram Venn:



Contoh 4.23:

Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka $A // B$.

5. Himpunan Kuasa

- Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.
- Notasi : $P(A)$ atau 2^A
- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

Contoh 4.24:

Jika A = { 1, 2 }, maka $P(A)$ = { ∅, { 1 }, { 2 }, { 1, 2 }}

Contoh 4.25:

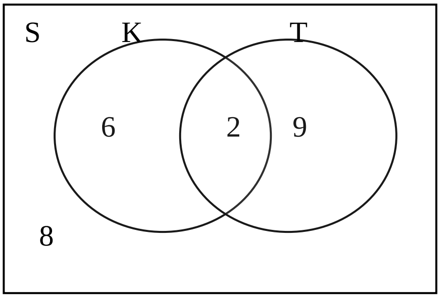
Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\varnothing)$ = {∅}, dan himpunan kuasa dari himpunan {∅} adalah $P(\{\varnothing\})$ = {∅, {∅}}.

J. KONSEP HIMPUNAN DALAM PEMECAHAN MASALAH

Jika kalian amati masalah dalam kehidupan sehari-hari maka banyak di antaranya dapat diselesaikan dengan konsep himpunan. Agar dapat menyelesaikannya, kalian harus memahami kembali mengenai konsep diagram Venn. Kalian harus dapat menyatakan permasalahan tersebut dalam suatu diagram Venn. Perhatikan contoh berikut:

Contoh 4.26:

Perhatikan diagram Venn dibawah ini!



S = himpunan siswa kelas VII A

K = himpunan siswa yang suka minum es teh

T = himpunan siswa yang suka minum jus

Setiap angka menunjukkan banyaknya siswa dalam masing-masing kesukaannya.

Tentukanlah:

a. Berapa banyak siswa yang suka minum keduanya?
b. Berapa banyak siswa yang suka minum es teh?
c. Berapa banyak siswa yang tidak suka minum keduanya?
d. Berapa banyak siswa kelas VII A tersebut?

Jawab:

a. $n(K \cap T) = 2$
b. $n(K) = 6$
c. $n(K \cup T)^c = 8$
d. $n(S) = n(K - T) + n(T - K) + n(K \cap T) + n(K \cup T)^c = 4 + 7 + 2 + 8 = 21$

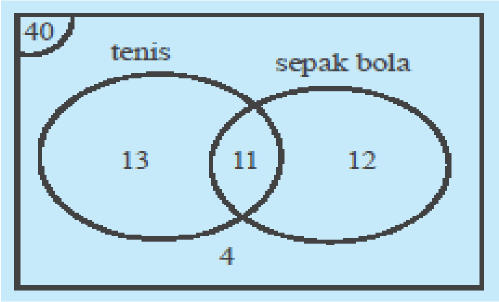
Contoh 4.27:

Dalam suatu kelas yang terdiri atas 40 siswa, diketahui 24 siswa gemar bermain tenis, 23 siswa gemar sepak bola, dan 11 siswa gemar keduaduanya. Gambarlah diagram Venn dari keterangan tersebut, kemudian tentukan banyaknya siswa:

a. yang hanya gemar bermain tenis;
b. yang hanya gemar bermain sepak bola;
c. yang tidak gemar kedua-duanya.

Jawab:

Dalam menentukan banyaknya anggota masing-masing himpunan pada diagram Venn, tentukan terlebih dahulu banyaknya anggota yang gemar bermain tenis dan sepak bola, yaitu 11 siswa. Diagram Venn-nya seperti gambar berikut



a. Banyak siswa yang hanya gemar tenis = 24 – 11 = 13 siswa
b. Banyak siswa yang hanya gemar sepak bola = 23 – 11 = 12 siswa
c. Banyak siswa yang tidak gemar kedua-duanya = 40–13–11–12 = 4 siswa

K. RANGKUMAN

1. Himpunan sering diartikan sebagai kumpulan objek (abstrak atau konkret) yang didefinisikan dengan jelas (*well defined*), jadi keaggotaannya harus jelas.
2. Cara menyatakan himpunan dengan tiga cara yaitu: dengan kata-kata, dengan mendaftrakan anggota-anggotanya dan dengan notasi himpunan.
3. Macam-macam himpunan:
   a. Himpunan kosong
   b. Himpunan semesta
   c. Himpunan berhingga dan tak berhingga
4. Operasi himpunan terdiri dari:
   a. Irisan
   b. Gabungan
   c. Komplemen
   d. Selisih
   e. Beda setangkup
   f. Perkalian cartesius
5. Hubungan antar himpunan terdiri dari:
   a. Himpunan bagian
   b. Himpunan yang sama
   c. Himpunan ekivalen
   d. Himpunan saling lepas

L. LATIHAN

1. Tuliskan dengan menggunakan notasi himpunan
   a. x bukan elemen A
   b. A dimuat oleh B
   c. A memuat B
   d. A tidak memuat B

2. Nyatakan dalam bentuk daftar himpunan berikut:
   a. $A = \{x | x^2 = 4\}$
   b. $B = \{x | x \ positif, \ x, \ negatif\}$
   c. $B = \{x | x - 4 = 5\}$

3. Nyatakan pernyataan berikut dengan 3 cara dalam menyatakan himpunan, lalu tentukan banyaknya masing-masing himpunan tersebut:
   a. himpunan bilangan prima yang kurang dari 20
   b. himpunan bilangan ganjil antara 10 sampai 30

4. Selidikilah apakah himpunan berikut kosong atau bukan!
   a. himpunan bilangan prima genap
   b. himpunan bilangan genap yang habis dibagi 7
   c. himpunan nama bilangan yang lamanya 32 hari tiap bulan
   d. A = $\{ x | x - 2 = -6, \ x \ bilangan \ asli\}$

5. Diberikan A = {1, 2, 3, 4}, B ={2, 4, 6, 8}, dan C ={3, 4, 5, 7}. Tentukanlah:
   a. $A \cap B$
   b. $A \cap C$
   c. $B \cap C$
   d. $(A \cap B) \cap C$
   e. $A \cap (B \cap C)$

6. Jika $M = \{x | \ x < 10, \ x \ bilangan \ bulat \ positif\}$

   $N = \{y | \ y > 10, \ y \ bilangan \ bulat \ positif\}$

Maka tentukanlah kardinalitas himpunan M dan N serta apa perbedaan kardinalitas himpunan M dan himpunan N

7. Dari 53 bayi di PUSKESMAS, 30 bayi minum susu kaleng, 13 bayi minum susu ASI, dan 10 bayi minum keduanya. Berapa jumlah bayi yang hanya minum ASI?

8. Dari 46 siswa yang gemar bahasa inggris ada 26 siswa, gemar bahasa arab ada 32 siswa dan 14 siswa gemar keduanya. Tentukan banyaknya siswa yang tidak gemar keduanya!

9. Dari sekelompok siswa yang suka tennis meja ada 26 siswa, yang gemar bulu tangkis ada 27 siswa, yang gemar keduanya ada 9 siswa dan yang tidak gemar keduanya ada 4 siswa. Tentukan banyaknya siswa dalam kelompok tersebut!

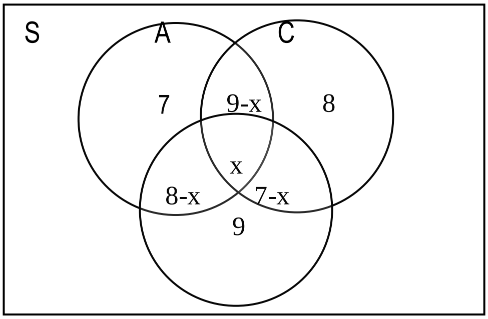
10. Dari 500 yang ikut ujian masuk perguruan tinggi, ternyata 329 mengikuti ujian matematika, 186 mengikuti ujian fisika, 83 mengikuti ujian matematika dan fisika. Tentukan jumlah siswa yang tidak mengikuti ujian matematika maupun fisika !

11. Suatu himpunan bilangan asli terdiri atas 10 bilangan yang hasbis dibagi 6, 15 bilangan yang habis dibagi 2, 10 bilangan yang habis dibagi 3 dan satu bilangan yang tidak habis dibagi 2 ataupun 3. Tentukan banyaknya unsur bilangan tersebut!

12. Jika hasil penelitian yang dilakukan terhadap 250 orang penduduk suatu desa menyatakan bahwa. Ada 60 orang

pemilik sawah dan 110 orang penggarap sawah. Disamping itu ada pula 100 orang yang bukan pemilik maupun penggarap sawah. Maka tentukan banyaknya orang sebagai pemilik dan penggarap sawah !

13. Perhatikan himpunan A, B, dan C dalam diagram Venn berikut!

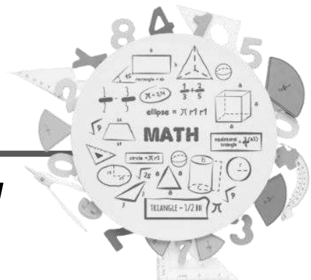


Diberikan S = A $\cup$ B $\cup$ C, dan n(S) = 34, hitunglah:

a. nilai x

b. n(A $\cap$ B $\cap$ C)

BAB 5



RELASI DAN FUNGSI

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari, anda tentunya sering mendengar kata “relasi”. Relasi memiliki arti hubungan. Misalkan teman kantor, sering kita sebut relasi atau rekan kerja. Relasi “bersaudara dengan” (Dian bersaudara dengan Dani, Vita bersaudara dengan Vino, dan sebagainya). Relasi “teman” (Fahrul dengan Taufik, Wirda dengan Asmi, Jumriati dengan Wiana, dan sebagainya). Contoh lain relasi “gemar” (Asri gemar sepak bola, Hendra gemar Bola Volly, dan sebagainya). Dalam matematika, relasi diartikan sebagai hubungan antara dua himpunan.

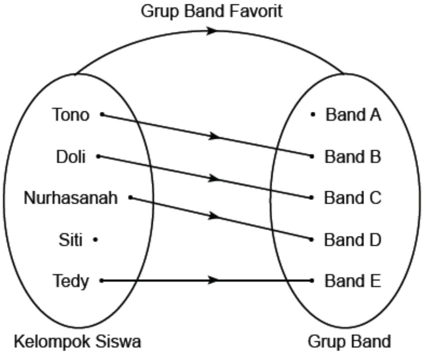
Telah diuraikan pada unit 3, bahwa himpunan merupakan objek dasar dari semua objek yang dipelajari dalam matematika. Fungsi juga merupakan objek dasar dalam pembelajaran matematika. Apa perlunya kita mempelajari fungsi? Fungsi memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan sehari-hari. Di bidang ekonomi, misalnya, mengekspresikan kajiannya tentang analisis permintaan dan penawaran suatu produk. Melalui grafik fungsi dapat dilihat perkembangan fluktuasi permintaan dan penawaran dari waktu ke waktu. Di bidang kedokteran, kondisi kesehatan jantung seseorang dapat dipantau melalui grafik fungsi jumlah detak jantung terhadap satuan waktu. Bidang lain yang banyak memanfaatkan fungsi adalah teknologi informasi dalam mengenskripsi data. Hal ini menunjukkan funsi diperlukan untuk melakukan deskripsi dan analisis dalam sebuah bidang kajian.

Sebelum masuk pada bahasan fungsi, maka terlebih dahulu harus dipahami konsep-konsep yang mendasari pembentukan konsep fungsi yakni perkalian himpunan dan relasi. Jadi, fungsi merupakan bentuk khusus dari relasi.

Aktivitas

Kegiatan 1:

Gambar berikut merupakan hubungan antara kelompok siswa dengan kelompok band favoritnya:



Dari gambar tersebut, tanpa ada penjelasan yang lebih terperinci apa kalian temukan? Diskusikan!

Kegiatan 2:

Dalam rangka memperingati HUT RI ke-71 di Kota Makassar, SMA Negeri 9 Makassar akan mengirimkan siswanya untuk mengikut pertandingan antar SMA untuk pertandingan tenis lapangan, sepakbola, bola volley, bulu tangkis, tenis meja, dan catur. Terdapat 6 orang siswa (Ansar, Amri, Jaya, Arman, Harun, dan Fahrul) yang akan mengikuti pertandingan tersebut. Pasangkanlah siswa dengan pertandingan yang akan diikuti dengan ketentuan berikut:

1. Ansar ikut pertandingan tenis meja dan bola volley, Amri ikut pertandingan badminton, Jaya ikut pertandingan catur, Arman ikut pertandingan bola volley, Harun ikut pertandingan tenis meja dan Fahrul ikut pertandingan tenis meja.
2. Arman ikut pertandingan bola volley, Jaya ikut pertandingan catur, Amri ikut pertandingan badminton, Harun dan Fahrul ikut pertandingan bola volley.
3. Keenam siswa ikut pertandingan sepakbola
4. Tono akan mengikuti seluruh pertandingan

A. PRODUCT CARTESIUS

Product Cartesius dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan berurutan (*ordered pairs*) yang terbentuk dari komponen pertama himpunan A dan komponen kedua himpunan B. Penulisan: A x B = { (a, b) l a $\in$ A dan b $\in$ B }

Contoh 5.1:

1. Tentukan Product Cartesius dari himpunan A = {1, 2, 3}, dan B = {a, b}

   Jawab :

   Product Cartesius dari himpunan A dan B :

   A x B = {(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)}

2. Dua buah uang logam Rp. 500,- dilempar bersama-sama, tentukan kemungkinan angka dan gambar yang akan muncul pada kedua uang logam tersebut .

Jawab :

misalkan :

a = logam pertulisan angka Rp. 500,-

g = logam yang bergambar garuda

A = {a, g}

B = {a, g}

angka dan gambar yang muncul pada pelemparan kedua uang logam :

A x B = {(a, a), (a, g), (g, a), (g, g)}

3. Dua buah dadu dilempar bersama-sama, tentukan kemungkinan angka-angka yang akan muncul pada kedua dadu tersebut .

   Jawab :

   Kedua dadu masing-masing mempunyai angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6

   A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

   B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

   angka-angka yang akan muncul pada kedua dadu

   A x B = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
   (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
   (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),
   (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),
   (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),
   (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

4. Sebuah uang logam dan sebuah dadu dilempar bersamaan, tentukan kemungkinan angka atau gambar pada uang logam dan angka pada dadu tersebut.

   Jawab :

   Uang logam mempunyai dua sisi yaitu angka Rp. 500,- (a) dan gambar garuda (g)

A = {a, g}
Dadu mempunyai enam angka yaitu 1, 2, 3, 4, 5 dan 6
B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Angka atau gambar pada uang logam dan angka pada dadu yang mungkin terjadi :
A x B = {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (a, 5), (a, 6), (g, 1), (g, 2), (g, 3), (g, 4), (g, 5), (g, 6)}

5. Dari kota A ke kota B ada 3 jalan yang berbeda, dari kota B ke kota C ada 4 jalan yang berbeda. Tentukan semua jalan yang dapat dilalui dari kota A ke kota C.
Jawab :
Dari kota A ke kota B ada 3 jalan yang berbeda misalnya p_1, p_2, p_3
P = {p_1, p_2, p_3}
Dari kota B ke kota C ada 4 jalan yang berbeda misalnya q_1, q_2, q_3, q_4
Q = {q_1, q_2, q_3, q_4}
Semua jalan yang dapat dilalui dari kota A ke kota C :
P x Q = {(p_1, q_1), (p_1, q_2), (p_1, q_3), (p_1, q_4),
(p_2, q_1), (p_2, q_2), (p_2, q_3), (p_2, q_4),
(p_3, q_1), (p_3, q_2), (p_3, q_3), (p_3, q_4)}

B. RELASI PADA HIMPUNAN

Jika P x Q adalah Product Cartesius himpunan P dan Q, maka relasi R dari himpunan P ke Q adalah sembarang himpunan bagian dari Product Cartesius P x Q.
Pada relasi R = {(x, y) I x $\in$ P $\cap$ y $\in$ Q}, maka:

- Himpunan P disebut domain.
- Himpunan Q disebut kodomain.

- Himpunan bagian dari Q yang bersifat x R y disebut range.

Contoh 5.2:

1. Relasi himpunan P = {1, 2, 3} dan Q = {p, q} ditentukan relasi oleh R_1 , R_2, R_3 berikut ini :

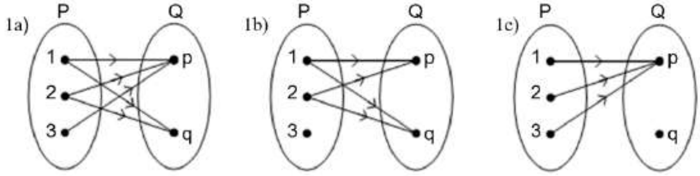
   a) R_1 = {(1, p), (1, q), (2, p), (2, q), (3, p)}

   b) R_2 = {(1, p), (1, q), (2, p), (2, q)}

   c) R_3 = {(1, p), (2, p), (3, p)}

   Gambarkan relasi himpunan R_1, R_2 dan R_3 serta tentukan domain, kodomain, dan range

   Jawab:



domain = {1, 2, 3}
kodomain = {p, q}
range = {p, q}

domain = {1, 2}
kodomain = {p, q}
range = {p, q}

domain = {1, 2, 3}
kodomain = {p, q}
range = {p}

C. SIFAT-SIFAT RELASI

a. Refleksif

Relasi R pada himpunan A disebut refleksif jika $(x, x) \in R$ untuk setiap $x \in A$.

Contoh 5.3:

Himpunan A = {1, 2, 3, 4, 5}, dan relasi R didefinisikan pada himpunan A. manakah yang bersifat reflektif pada relasi berikut ini:

1) R = {(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 5)}

2) R = {(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 2), (5, 5)}

Jawab :

1) Relasi R bersifat refleksif karena terdapat unsur relasi (x, x) ∈ R,
   yaitu (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) dan (5, 5)
2) Relasi R tidak bersifat refleksif karena (4, 4) ∈ R.

b. Simetris

Relasi R pada himpunan A disebut simetris jika untuk semua x, y ∈ A, jika (x, y) ∈ R, maka (y, x) ∈ R. Relasi R disebut tak simetris (anti simetris) jika x, y ∈ A, jika (x, y) ∈ R dan $x \neq y$, maka (y, x) ∉ R.

Contoh 5.4:

Himpunan A {1, 2, 3, 4, 5} dan relasi R didefinisikan pada himpunan A.

Manakah relasi yang bersifat simetris pada relasi berikut ini :

1) R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 5), (4, 2), (4. 4), (5, 3) (5, 5)}
2) R = {(1, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 2), (5, 3), (5, 5)}

Jawab:

1) Relasi R bersifat simetris karena (x, y) ∈ R dan (y, x) ∈ R, yaitu :
   (1, 2) ∈ R dan (2, 1) ∈ R
   (2, 4) ∈ R dan (4, 2) ∈ R
   (3, 5) ∈ R dan (5, 3) ∈ R
2) Relasi R bersifat tidak simetris karena (3, 2) ∉ R

c. Transitif

Relasi R pada himpunan A disebut transitif (menghantar), jika $(x, y) \in R$ dan $(y, z) \in R$, maka $(x, z) \in R$, untuk $x, y, z \in A$.

Contoh 5.5:

Manakah relasi yang bersifat transitif pada relasi berikut ini :

1) Diketahui $A = \{ 1, 2, 3 \}$.
   Pada A didefinisikan relasi $R = \{ (1,1) , (1,2) , (2,2) , (2,1) , (3,3) \}$ Relasi R tersebut bersifat transitif.
2) Relasi $R = \{ (1,1) , (1,2) , (2,2) , (2,3) , (3,3) , (3,2) \}$ yang didefinisikan pada himpunan $A = \{1, 2, 3 \}$ tidak bersifat transitif, karena terdapat $(1,2) \in R$ dan $(2,3) \in R$, tetapi $(1,3) \notin R$.

d. Antisimetris

Relasi R dikatakan bersifat antisimetris jika untuk setiap $(x,y) \in R$ dan $(y,x) \in R$ berlaku $x = y$.

Contoh 5.6:

Manakah relasi yang bersifat antisimetris pada relasi berikut ini :

1) Pada himpunan $B = \{ 2, 4, 5 \}$ didefinisikan relasi $R = \{ (x,y) \mid x$ kelipatan y , $x,y \in B \}$. Dengan demikian $R = \{(2,2),(4,4),(5,5),(4,2)\}$. Relasi R tersebut bersifat antisimetris.
2) Diketahui $A = \{ 1, 2, 3 \}$.
   Pada A didefinisikan relasi $R = \{ (1,1) , (1,2) , (2,2) , (2,1) , (3,3) \}$
   Relasi R tersebut tidak bersifat antisimetris karena terdapat $(1,2) \in R$ dan $(2,1) \in R5$, tetapi $1 \neq 2$.

e. Relasi Ekivalen

Relasi R disebut sebagai sebuah relasi ekivalen jika relasi tersebut bersifat refleksif, simetris dan transitif.

Contoh 5.7:

1) Diketahui A = { 1, 2, 3 }.

   Pada A didefinisikan relasi R = { (1,1) , (1,2) , (2,2) , (2,1) , (3,3) }

   Relasi R tersebut bersifat refleksif, simetris dan transitif. Oleh karena itu relasi R merupakan relasi ekivalen.

2) Diketahui B = { 2, 4, 5 }.

   Pada B didefinisikan relasi R = { (x,y) | x kelipatan y , x,y $\in$ B }.

   R = { (2,2) , (4,4) , (5,5) , (4,2) }

   Relasi R tersebut tidak bersifat simetris, oleh karena itu relasi tersebut bukan relasi ekivalen.

f. Relasi Pengurutan Sebagian

Relasi R disebut sebagai sebuah relasi pengurutan sebagian (partial ordering), jika relasi tersebut bersifat refleksif, transitif dan antisimetris.

Contoh 5.8:

1) Diketahui A = { 1, 2, 3 }.

   Pada A didefinisikan relasi R = { (1,1) , (1,2) , (2,2) , (2,1) , (3,3) }

   Relasi R tersebut bersifat refleksif dan transitif, tetapi tidak bersifat antisimetris. Oleh karena itu relasi tersebut bukan merupakan relasi pengurutan sebagian.

2) Diketahui B = { 2, 4, 5 }.

Pada B didefinisikan relasi $R = \{ (x,y) \mid x$ kelipatan y , $x,y \in B \}$.

$R = \{ (2,2) , (4,4) , (5,5) , (4,2) \}$

Relasi R tersebut bersifat refleksif, antisimetris dan transitif. Oleh karena itu relasi tersebut merupakan relasi pengurutan sebagian.

Aktivitas.
Kegiatan 1: 

Lima orang siswa yaitu: Wirda, Asmi, Irma, Selvi, dan Ria merupakan sahabat yang selalu bersama-sama dalam setiap kegiatan sekolah. Bapak Amri adalah guru matematika yang senang persahabatan yang mereka bina karena mereka selalu memiliki nilai paling bagus. Suatu hari bapak Amri ingin mengetahui data-data tentang mereka. Hal ini diperlukan sebagai bahan motivasi untuk teman-teman mereka. Data-data yang diinginkan berupa: berapa jam rata-rata waktu belajar mereka dalam satu hari.

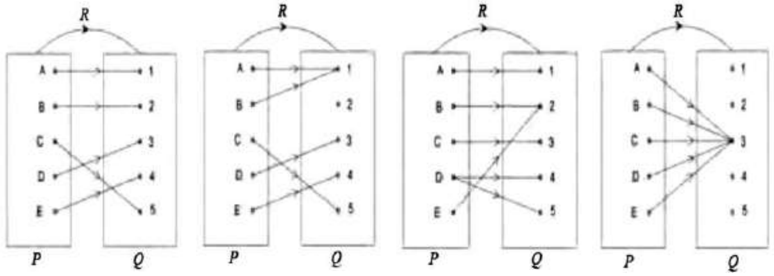
1. Jika kelima sahabat itu dibuat dalam satu himpunan misalnya himpunan A dan lama waktu belajar dalam satu hari adalah anggota himpunan B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.
   a. Nyatakanlah sebuah relasi yang mungkin menurut anda yang menggambarkan lama waktu belajar lima sahabat itu
   b. Apakah semua anggota himpunan A pasti memiliki pasangan dengan anggota himpunan B? berikan penjelasanmu.
   c. Apakah ada dua kemungkinan bahwa anggota himpunan A berpasangan dengan 2 atau lebih anggota himpunan B? berikan penjelasanmu.

d. Apakah ada dua kemungkinan bahwa anggota himpunan A memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota himpunan B? berikan penjelasanmu!

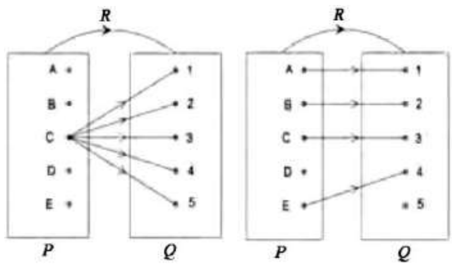
2. Jika kelima sahabat itu dibuat dalam satu himpunan misalnya himpunan C dan data tentang banyaknya saudara mereka ada dianggota himpunan D yang anggoyanya D = {1, 2, 3, 4}.
   a. Nyatakanlah sebuah relasi yang mungkin menurut anda yang menggambarkan banyak saudara kelima sahabat itu.
   b. Untuk semua relasi yang mungkin, apakah semua anggota himpunan C memiliki pasangan dengan anggota himpunan D? berikan penjelasanmu.
   c. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan C berpasangan dengan 2 atau lebih anggota himpunan D? berikan penjelasanmu.
   d. Apakah ada kemungkiananan bahwa anggota himpunan C memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota himpunan D? berikan penjelasanmu!

Kegiatan 2:

Perhatikanlah relasi-relasi yang ditunjukan pada gambar berikut:



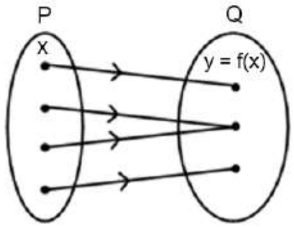
v



Dari gambar tersebut uraiakan fakta-fakta apa saja yang kalian peroleh? Apakah semuanya termasuk fungsi? Yang mana saja merupakan fungsi? Berikan penjelasanmu?

D. Hubungan Relasi dengan Fungsi

Relasi dari himpunan P ke himpunan Q disebut fungsi atau pemetaan, jika dan hanya jika tiap unsur pada himpunan P berpasangan tepat hanya dengan sebuah unsur pada himpunan Q.



$f : x \to y$

x disebut variabel bebas

y disebut variabel tak-bebas.

Jika $x \in P$ dan $y \in Q$ sehingga pasangan-terurut $(x, y) \in f$, maka y disebut peta atau bayangan dari x oleh fungsi f. Adapun bagian-bagian dari fungsi adalah Domain, Kodomain, dan Range.

1) Domain (daerah asal) fungsi f adalah himpunan P (D_f)
2) Kodomain (daerah kawan) fungsi f adalah himpunan Q (K_f)

3) Range (daerah hasil) fungsi f adalah himpunan semua peta P di Q (R_f)

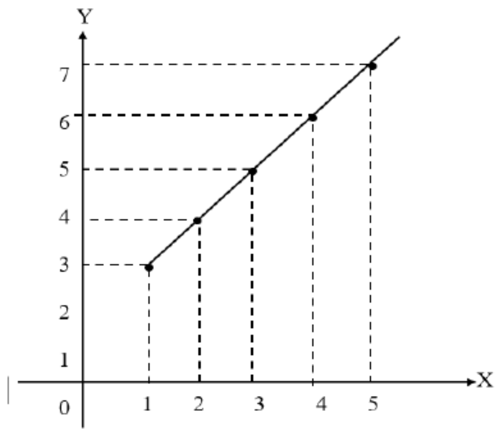
Contoh 5.9:

1. Diketahui $f : A \rightarrow R$ dan f dinyatakan oleh f (x) = x + 2
   Jika daerah asal A ditetapkan $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 5, x \in R\}$,
   a. Carilah f(1), f(2), f(3), f(4) dan f(5)
   b. Gambarkan grafik fungsi y = f(x) = x + 1 dalam bidang Cartesius
   c. Carilah daerah hasil dari fungsi f

   Jawab :

   a) f(x) = x + 2
      f(1) = 1 + 2 = 3
      f(2) = 2 + 2 = 4
      f(3) = 3 + 2 = 5
      f(4) = 4 + 2 = 6
      f(5) = 5 + 2 = 7

   b) Grafik fungsi y = f(x) = x + 2



   c) Daerah hasil
      $R_f = \{y \mid 3 \leq y \leq 7, y \in R\}$

2. Tentukan daerah asal alami (natural domain) dari tiap fungsi berikut ini :

   a) $f(x) = \dfrac{4}{x-1}$

   b) $F(x) = \sqrt{9-x^2}$

   c) $G(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

   Jawab :

   a) $f(x) = \dfrac{4}{x-1}$; supaya f(x) bernilai real maka $x - 1 \neq 0$ atau $x \neq 1$

      Jadi, $D_f = \{x \mid x \in R \text{ dan } x \neq 1\}$

   b) $F(x) = \sqrt{9-x^2}$; supaya F(x) bernilai real maka

      $9 - x^2 \geq 0$

      $x^2 - 9 \leq 0$

      $(x + 3)(x - 3) \leq 0 \qquad -3 \leq x \leq 3$

      Jadi, $D_F = \{x \mid -3 \leq x \leq 3; x \in R\}$

   c) $G(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x^2-5x+6}}$; supaya G(x) bernilai real maka

      $X^2 - 5x + 6 > 0$

      $(x - 2)(x - 3) > 0$

      $x < 2$ atau $x > 3$

      Jadi, $D_G = \{x \mid x < 2 \text{ atau } x > 3; x \in R\}$

E. MACAM-MACAM FUNGSI

Ada beberapa fungsi yang mempunyai ciri spesifik di antaranya: fungsi konstan, fungsi identitas, fungsi genap, fungsi ganjil, fungsi modulus, dan fungsi tangga.

1) Fungsi Konstan

Untuk semua unsur dalam himpunan A berkaitan hanya dengan sebuah unsur dalam himpunan B. Fungsi konstan ditulis f : x $\rightarrow$ k, k = konstanta, x $\in$ R. Grafik fungsi konstan merupakan garis yang sejajar dengan sumbu X .

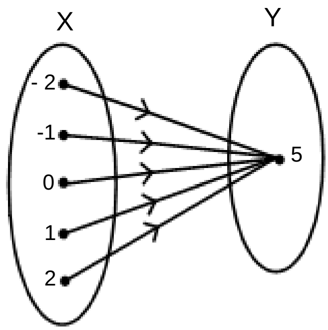
Contoh 4.10:

Buat diagram panah dan grafik pada bidang Cartesius untuk fungsi y = 5.

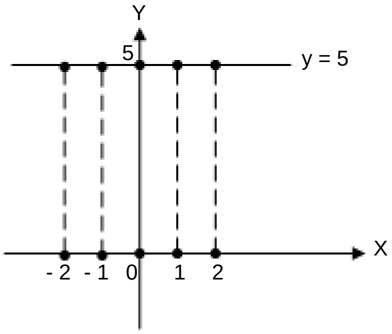
($-2 \leq x \leq 2$ dan x $\in$ bilangan bulat)

Jawab :

Diagram panah



Grafik pada bidang Cartesius



2) Fungsi Identitas

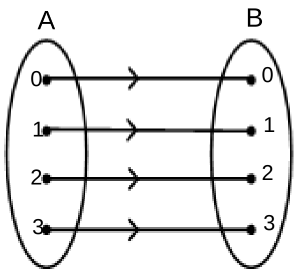
Semua unsur dalam himpunan A berkaitan dengan dirinya sendiri. Grafik fungsi identitas y = x untuk x $\in$ R

Contoh 5.11:

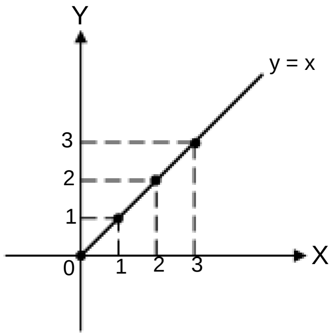
Buat diagram panah dan grafik pada bidang Cartesius untuk fungsi y = 5, (x $\leq$ 3 dan x $\in$ bilangan cacah)

Jawab :

Diagram panah



Grafik pada bidang Cartesius



3) Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

   Fungsi f : x $\rightarrow$ y = f(x) disebut fungsi genap jika f(- x) = + f(x)

   Grafik fungsi genap selalu simetri terhadap sumbu Y

   Fungsi f : x $\rightarrow$ y = f(x) disebut fungsi ganjil jika f(- x) = - f(x)

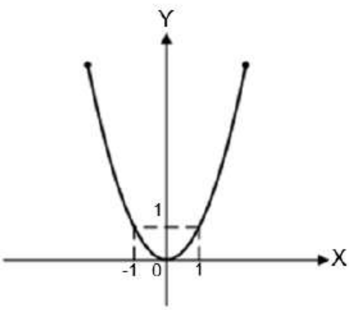
   Grafik fungsi ganjil selalu simetri terhadap titik asal O

   Jika suatu fungsi y = f(x) tidak memenuhi keduanya maka disebut fungsi tak genap dan tak ganjil

Contoh 5.12:

Manakah yang merupakan fungsi genap atau fungsi ganjil ?

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^3$
c) $f(x) = x^3 + 1$



Jawab :

a) $f(x) = x^2$

   $f(-x) = (-x)^2$

   $= x^2$

$f(-x) = +f(x)$

$f(x) \quad = x^2$ fungsi genap

b) $f(x) = x^3$

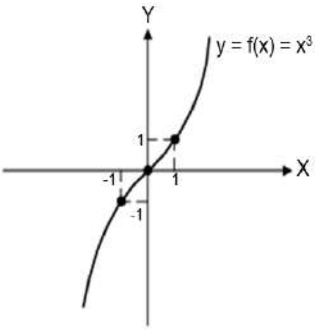
$f(-x) = (-x)^3$

$= -x^3$

$-f(x) = -x^3$

$f(-x) = -f(x)$

$f(x) \quad = x^3$ fungsi ganjil



c) $f(x) \quad = x^3 + 1$

$f(-x) = (-x)^3 + 1$

$= -x^3 + 1$

$-f(x) = -(x^3 + 1)$

$= -x^3 - 1$

$f(-x) \neq +f(x)$ dan $f(-x) \neq -f(x)$

maka $f(x) = x^3 - 1$ bukan fungsi genap dan bukan fungsi ganjil.

4) Fungsi Modulus

Modulus atau nilai mutlak dari sebuah bilangan real x

$$|x| = \begin{cases} +x, \text{ jika } x > 0 \\ 0, \text{ jika } x = 0 \\ -x, \text{ jika } x < 0 \end{cases}$$

Contoh 5.13:

Diketahui fungsi f:x $\longrightarrow$ I x I dengan x $\in$ R

Carilah f(– 3) , f(– 2), f(–1), f(0), f(1), f(2) dan f(3)

Jawab :

f(x) = I x I

f(– 3) = I – 3 I = 3

f(– 2) = I – 2 I = 2

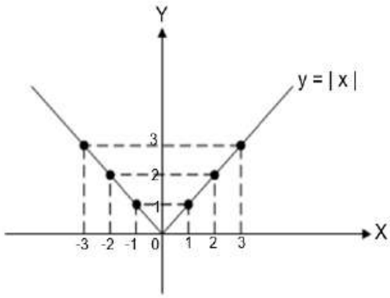
f(–1) = I –1 I = 1

f(0) = I 0 I = 0

f(1) = I 1 I = 1

f(2) = I 2 I = 2

f(3) = I 3 I = 3



5) Fungsi Tangga

Fungsi Tangga atau Fungsi Nilai Bulat Terbesar dalam perhitungan matematika sering dilakukan pembulatan

Contoh 5.14:

0,2; 0,3; 0,78 dan seterusnya untuk semua x $\in$ R dan 0 $\leq$ x < 1 dibulatkan ke bawah menjadi 0

1,1; 1,2; 1,57 dan seterusnya yang kurang x $\in$ R dan 1 $\leq$ x < 2 dibulatkan ke bawah menjadi 1.

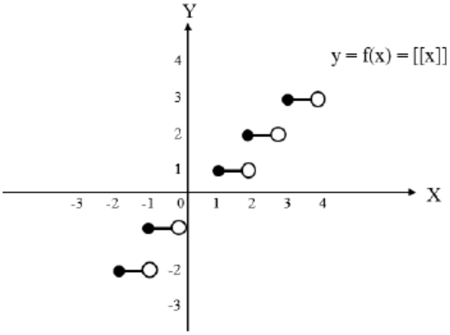
Suatu nilai bulat terbesar yang kurang dari x dilambangkan dengan [[x]].

– 2 $\leq$ x < –1	$\rightarrow$	[[x]] = – 2
–1 $\leq$ x < 0	$\rightarrow$	[[x]] = –1
0 $\leq$ x < 1	$\rightarrow$	[[x]] = 0
1 $\leq$ x < 2	$\rightarrow$	[[x]] = 1
2 $\leq$ x < 3	$\rightarrow$	[[x]] = 2

Fungsi f: x $\longrightarrow$ [[x]] disebut fungsi nilai bulat terbesar

Grafik fungsi y = f(x) = [[x]] untuk x $\in$ R

Grafiknya menyerupai tangga maka f(x) = [[x]] sering disebut fungsi tangga



F. SIFAT-SIFAT FUNGSI

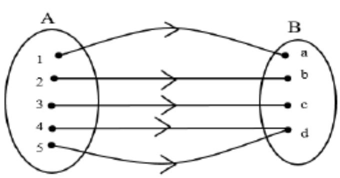
1) Fungsi Surjektif

- Fungsi f : A $\rightarrow$ B disebut fungsi surjektif atau fungsi onto atau fungsi kepada jika dan hanya jika daerah fungsi f sama dengan himpunan B atau R_f = B

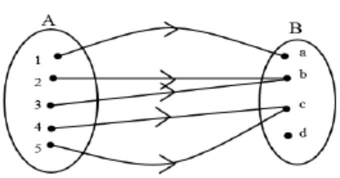
- Fungsi f : A $\rightarrow$ B disebut fungsi into atau fungsi ke dalam jika dan hanya jika daerah hasil fungsi f merupakan himpunan bagian murni dari himpunan B atau R_f atau $R_f \subset$ B.

Contoh 5.15:

Himpunan A = {1, 2, 3, 4, 5} dan B = {a, b, c, d}



Fungsi f adalah fungsi onto
R_f = {a, b, c, d}
R_f = B



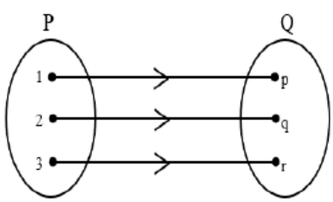
Fungsi f adalah fungsi into
R_f = {a, b, c}
$R_f \subset$ B

2) Fungsi Injektif

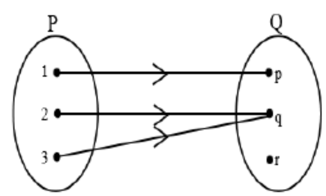
Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk tiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$ berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$

Contoh 5.16:

Himpunan P = {1, 2, 3} dan Q = {p, q, r}.



Fungsi f adalah fungsi injektif



Fungsi f bukan fungsi injektif

Untuk mengetahui fungsi injektif atau bukan, dapat dilihat melalui grafik

1) Gambarlah grafik fungsi $y = f(x)$ pada bidang Cartesius
2) Ambillah nilai-nilai x_1, x_2 anggota daerah asal dan $x_1 \neq x_2$
   a) Jika $f(x_1) \neq f(x_2)$ maka f merupakan fungsi injektif
   b) Jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka f bukan fungsi injektif

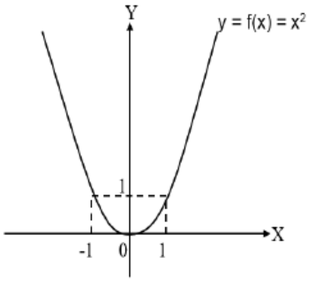
Contoh 5.17:

1. Manakah yang merupakan fungsi injektif di bawah ini:

   a) $y = f(x) = x^2, x \in R$ b) $y = f(x) = x^3, x \in R$

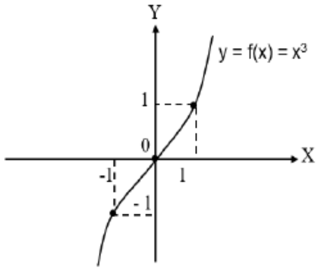
   Jawab :

a



bukan fungsi injektif

b



fungsi injektif

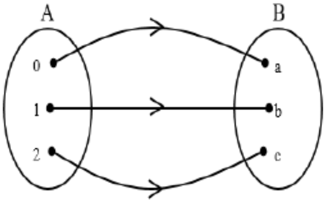
Fungsi Bijektif

Fungsi f: A $\rightarrow$ B disebut sebagai fungsi bijektif jika dan hanya jika fungsi f sekaligus merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.

Contoh 5.18:

Fungsi f : A $\rightarrow$ B

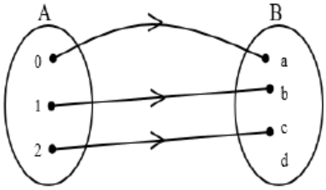
A = {0, 1, 2} dan B = {a, b, c}



fungsi f bijektif

Fungsi f : A $\rightarrow$ B

A = {0, 1, 2} dan B = {a, b, c, d}



fungsi f bukan bijektif

G. FUNGSI KOMPOSISI

Operasi komposisi dilambangkan dengan o (dibaca komposisi)

Fungsi baru dapat dibentuk dengan operasi komposisi

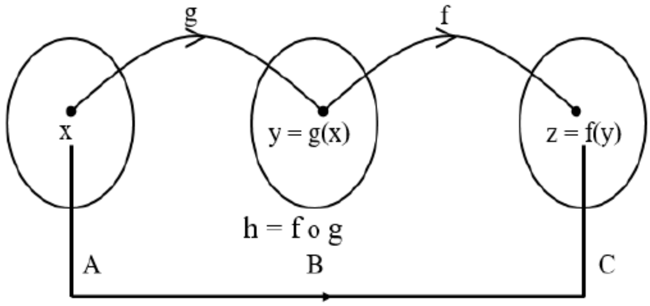
a. $(f \circ g)(x)$, dibaca: f komposisi g(x) atau f (g x)

b. $(g \circ f)(x)$, dibaca, g komposisi f(x) atau g (f x)

Fungsi $g : A \rightarrow B$

Tiap $x \in A$ dipetakan ke $y \in B$

Sehingga $g : x \rightarrow y$ ditentukan dengan rumus : $y = g(x)$



Fungsi $f : B \rightarrow C$.

Tiap $y \in B$ dipetakan ke $z \in C$, sehingga $f : y \rightarrow z$ ditentukan dengan rumus : $z = f(y)$

Fungsi $h : A \rightarrow C$.

Tiap $x \in A$ dipetakan ke $z \in C$, sehingga $h : x \rightarrow z$ ditentukan dengan rumus: $z = h(x)$

Fungsi h disebut komposisi dari fungsi f dan fungsi g.

Komposisi fungsi f dan g ditulis dengan notasi $h = f \circ g$ atau $h(x) = (f \circ g)(x)$

Contoh 5.19:

1. Fungsi $f : R \rightarrow R$ dan $g : R \rightarrow R$ ditentukan $f(x) = 4x - 1$ dan $g(x) = 2x$.

   Tentukan :

   a) $(f \circ g)(x)$

   b) $(g \circ f)(x)$

   Jawab :

   a) $f(x) = 4x - 1$

      $f(g(x)) = 4.g(x) - 1$

      $(f \circ g)(x) = 4(2x) - 1$

      $= 8x - 1$

   b) $g(x) = 2x$

      $g(f(x)) = 2.f(x)$

      $(g \circ f)(x) = 2(4x - 1)$

      $= 8x - 2$

2. Fungsi-fungsi f dan g dinyatakan dengan pasangan-terurut

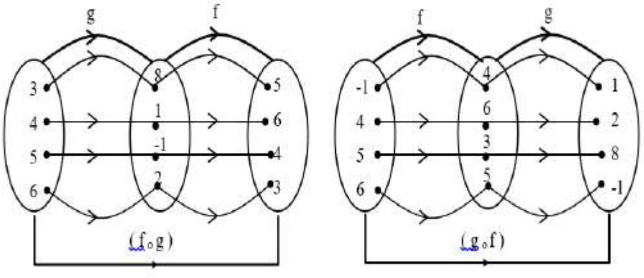
   $f = \{(-1, 4), (1, 6), (2, 3), (8, 5)\}$

   $g = \{(3, 8), (4, 1), (5, -1), (6, 2)\}$

   Tentukan :

a)	$(f \circ g)$	d)	$(f \circ g)(1)$
b)	$(g \circ f)$	e)	$(g \circ f)(1)$
c)	$(f \circ g)(4)$	f)	$(g \circ f)(4)$

   Jawab :



$(f \circ g) = \{(3, 5), (4, 6), (5, 4), (6, 3)\}$

a) $(f \circ g)(4) = 6$

b) $(f \circ g)(1)$ tidak ada

c) $(g \circ f)(1) = 2$

$(g \circ f) = \{(-1, 1), (1, 2), (2, 8), (8, -1)\}$

d) $(g \circ f)(4)$ tidak ada

e) $(g \circ f(1) = 2$

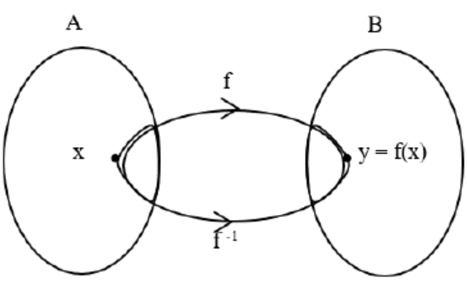
f) $(g \circ f)(4)$ tidak terdefinisi

H. FUNGSI INVERS

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ mempunyai fungsi invers $f^{-1} : B \rightarrow A$ jika dan hanya jika f merupakan fungsi bijektif atau himpunan A dan B mempunyai korespondensi satu-satu.

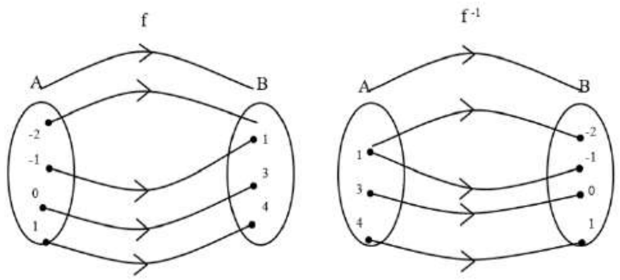
Jika fungsi $f : A \rightarrow B$ pasangan terurut $f : \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Maka invers fungsi f adalah $f^{-1} : B \rightarrow A$ adalah $f^{-1} = \{(b, a) \mid b \in B \text{ dan } a \in A\}$



Contoh 5.20:

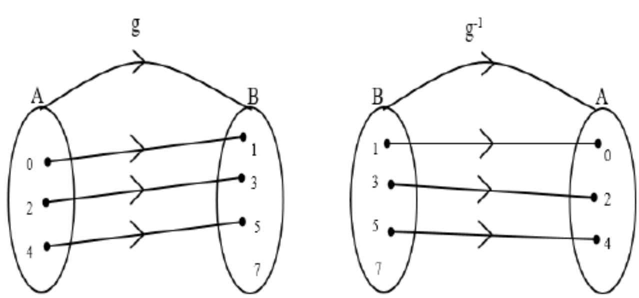
1. $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ dan $B = \{1, 3, 4\}$.
   Fungsi : $A \rightarrow B$ ditentukan oleh $f = \{(-2, 1), (-1, 1), (0, 3), (1, 4)\}$
   Carilah invers fungsi f, kemudian selidikilah apakah invers fungsi f itu merupakan fungsi
   Jawab :
   $f^{-1}: B \rightarrow A$ ditentukan oleh $f^{-1} = \{(1, -2), (1, -1), (3, 0), (4, 1)\}$



Dari gambar terlihat f $^{-1}$ adalah relasi biasa (bukan fungsi) sebab terdapat dua pasangan terurut yang mempunyai ordinat sama yaitu (1, – 2) dan (1, –1)

2. A = {0, 2, 4} dan B = {1, 3, 5, 7}.
   Fungsi : A $\longrightarrow$ B ditentukan oleh g = {(0, 1), (2, 3), (4,5)}
   Carilah invers fungsi g, kemudian selidikilah apakah invers fungsi g itu merupakan fungsi

   Jawab :
   g $^{-1}$: B $\longrightarrow$ A ditentukan oleh g $^{-1}$ = {(1, 0), (3, 2), (5, 4)}



Dari gambar terlihat g $^{-1}$ adalah relasi biasa (bukan fungsi) sebab ada sebuah anggota di B yang tidak dipetakan ke A, yaitu 7

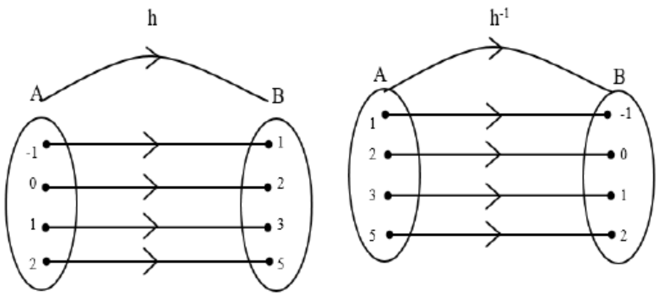
3. $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 5\}$.

   Fungsi $h: A \rightarrow B$ ditentukan oleh $h = \{(-1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 5)\}$.

   Carilah invers fungsi h, kemudian selidikilah apakah invers fungsi h itu merupakan fungsi.

   Jawab :

   $h^{-1}: B \rightarrow A$ ditentukan oleh $h^{-1} = \{(1, -1), (2, 0), (3, 1), (5, 2)\}$



   Dari gambar tampak bahwa h^{-1} merupakan suatu fungsi.

   Jadi, h^{-1} adalah fungsi invers.

4. Carilah fungsi inversnya

   a) $f(x) = x + 1$

   b) $f(x) = x^2 - 1$

   Jawab :

   a) $y = x + 1$

      $x = y - 1$

      $\boxed{x = f^{-1}(y)}$

      $f^{-1}(y) = y - 1$

$f^{-1}(x) = x - 1$

b) $y = x^2 - 1$

$x^2 = y + 1$

$x = \sqrt{y+1}$

$\boxed{x = f^{-1}(y)}$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y+1}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$

I. INVERS FUNGSI KOMPOSISI

Misalkan fungsi $f : A \to B$ dan $g : B \to C$. Jika h adalah fungsi komposisi dari f dan g atau $h : A \to C$ dengan $h = g \circ f$ maka invers fungsi h adalah $h^{-1} : C \to A$ dengan $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ jadi jika $h(x) = (g \circ f)(x)$ maka $h^{-1}(x) = (g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

Contoh 5.21:

Diketahui $h(x) = (g \circ f)(x)$ dengan $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ dan $g^{-1} = x - 4$. Tentukan $h^{-1}(x)$

Jawab:

Jika $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3} \to f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

Jika $h(x) = (g \circ f)(x)$ maka

$h^{-1}(x) = (g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

$h^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(x-4)$

$= \dfrac{3(x-4)+1}{(x-4)-2} = \dfrac{3x-11}{x-6}$

J. RANGKUMAN

1. Suatu relasi dapat dinyatakan dengan beberapa cara yaitu:
   a. Dengan kata-kata
   b. Dengan diagram panah
   c. Dengan himpunan pasangan berurutan
   d. Dengan grafik.

2. Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah pasangan berurutan yang merupakan himpunan bagian dari A x B

3. Daerah asal dari suatu relasi (domain) adalah himpunan yang beranggotakan dari unsur-unsur yang pertama dari pasangan berurutan itu, sedangkan daerah hasil suatu relasi adalah himpunan yang anggotanya terdiri dari unsur-unsur kedua dari pasangan berurutan tersebut.

4. Suatu fungsi f adalah suatu aturan yang megkaitkan setiap elemen x dalam suatu himpunan yang disebut daerah asal (domain) atau daerah definisi ke sebuah nilai tunggal f(x) dari himpunan kedua yang disebut kodomain. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (range).

5. Sifat-sifat fungsi
   a. Sifat bijektif
   b. Sifat injektif
   c. Sifat surjektif

6. Sifat-sifat relasi
   a. Sifat reflektif
   b. Sifat simetris
   c. Sifat transitif

K. LATIHAN

1. Diketahui $G = \{ 5, 7, 11 \}$. Tentukan $G \times G$ dan $n(G \times G)$.

2. Diketahui himpunan $A = \{a, b\}$ dan himpunan $B = \{ 9 \}$. Tentukan semua relasi $R : A \to B$ yang dapat didefinisikan dan hitung jumlahnya.

3. Diketahui himpunan $C = \{x, y\}$. Tentukan semua relasi $R : C \to C$ yang dapat didefinisikan dan hitung jumlahnya.

4. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan himpunan $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}$. Nyatakan relasi A terhadap B dengan relasi berikut.
   a. Anggota himpunan A dipasangkan dengan anggota himpuna B dengan relasi $B = A + 1$
   b. Anggota himpunan A dipasangkan dengan anggota himpunan B dengan relasi $B = 2A + 2$

   Kemudian periksa apakah relasi yang terbentuk adalah fungsi atau bukan.

5. Jika mahasiswa direlasikan dengan tanggal kelahirannya. Apakah relasi tersebut merupakan fungsi? Berikan penjelasan anda!

6. Nyatakan invers dari tiap relasi berikut :
   a. $R = \{ (x,y) \mid x \text{ habis dibagi oleh } y,\ x, y \in Z \}$
   b. $R = \{ (x,y) \mid x \leq y,\ x, y \in Z \}$
   c. $R = \{ (x,y) \mid x - 4 = y,\ x, y \in Z \}$

7. Diketahui $D = \{ x \mid x \text{ garis lurus} \}$
   Pada D didefinisikan relasi $R = \{ (x,y) \mid x \text{ sejajar } y,\ x \in D, y \in D \}$
   Relasi R tersebut bersifat ....

8. Diketahui $P = \{ x \mid x$ subset dari himpunan $A \}$
Pada P didefinisikan relasi $R = \{ (x,y) \mid x \subseteq y , x \in P , y \in P \}$
Relasi R tersebut bersifat ....

9. Diketahui $D = \{ x \mid x$ garis lurus $\}$
Pada D didefinisikan relasi $R = \{ (x,y) \mid x$ tegak lurus y, $x \in D , y \in D \}$
Relasi R tersebut bersifat ....

10. Relasi-relasi berikut didefinisikan pada himpunan $B = \{ 2, 4, 5 \}$.
    a. $R = \{ (2,2) , (4,4) , (5,5) \}$
    b. $R = \{ (2,4) , (4,5) , (2,5) , (5,2) , (2,2) \}$
    c. $R = \{ (5,4) \}$
    d. $R = \{ (x,y) \mid x$ habis membagi y , $x,y \in B \}$.

    Tentukan sifat yang dimiliki oleh masing-masing relasi tersebut.

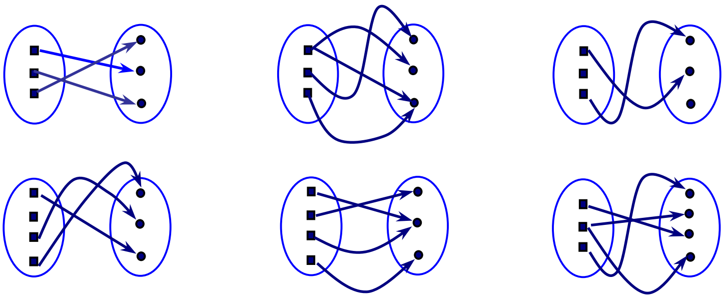
11. Relasi-relasi berikut didefinisikan pada himpunan Z (himpunan bilangan bulat).
    a. $R = \{ (2,2) , (4,4) , (5,5) \}$
    b. $R = \{ (2,4) , (4,5) , (2,5) , (2,2) \}$
    c. $R = \{ (5,4) \}$
    d. $R = \{ (x,y) \mid x$ habis membagi $y \}$.
    e. $R = \{ (x,y) \mid x \geq y \}$.

    Tentukan sifat yang dimiliki oleh masing-masing relasi tersebut.

12. Diketahui $D = \{ x \mid x$ garis lurus $\}$. Pada D didefinisikan relasi
    a. $R = \{ (x,y) \mid x$ sejajar y, $x \in D , y \in D \}$
    b. $R = \{ (x,y) \mid x$ tegak lurus y, $x \in D , y \in D \}$
    c. $R = \{ (x,y) \mid x$ berpotongan dengan y, $x \in D , y \in D \}$

Di antara ketiga relasi tersebut, sebutkan relasi yang merupakan relasi ekivalen dan relasi yang merupakan relasi pengurutan sebagian.

13. Di antara relasi-relasi berikut, relasi manakah yang merupakan fungsi ?



14. Fungsi-fungsi berikut didefinisikan pada himpunan bilangan riil R. Tentukan fungsi yang merupakan fungsi satu-satu, fungsi pada atau fungsi bijektif.
    a. f(x) = x
    b. f(x) = x^2
    c. f(x) = x^3
    d. f(x) = | x |

15. Tentukan domain dan range dari fungsi-fungsi yang diberikan berikut :
    a. f(x) = $\sqrt{x}$
    b. h(x) = $\sqrt{1+x}$
    c. g(x) = $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

16. Tentukan hasil operasi f + g, f – g, f . g, f / g, dan g / f beserta domain dari fungsi yang diberikan berikut ini.
    a. f(x) = $\frac{1+x}{1-x}$ dan g(x) = $\frac{1+x}{x}$
    b. f(x) = x dan g(x) = $\sqrt{x-1}$
    c. f(x) = $\sqrt{x}$ dan g(x) = $\sqrt{x+1}$

17. Tentukan domain dan range dari f dan g
    a. Selidiki apakah fungsi f o g dan g o f terdefinisi
    b. Jika fungsi komposisi pada poin (b) terdefinisi, tentukan domain dan range dari masing-masing fungsi komposisi tesebut.
        1) f(x) = 4x – x^2 dan g(x) = $\sqrt{x}$
        2) f(x) = 1 – x^2 dan g(x) = 1 + 2x
        3) f(x) = $\sqrt{1-x}$ dan g(x) = $\sqrt{1+x}$
        4) f(x) = $\frac{2x}{1-x}$ dan g(x) = 1- x^2.

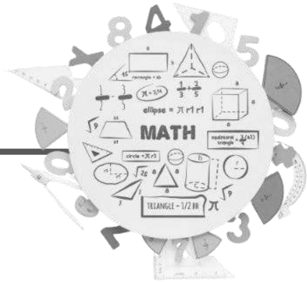
18. Tentukan invers dari fungsi $f(x) = \frac{3x+4}{2x-1}$

19. Diketahui fungsi $f : R \rightarrow R$ dengan $f(x) = -1 + \frac{2}{x-1}$.

    Jika $f^{-1}(k) = \frac{5}{3}$ maka tentukanlah nilai k

20. Jika $f(x) = \frac{1}{x}$ dan $g(x) = 2x-1$, maka tentukan $(f \circ g)^{-1}(x)$

BAB 6



PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN

PENDAHULUAN

Persamaan dan pertidaksamaan adalah materi yang sering terkait dengan kehidupan sehari-hari, ketika kita akan menyelesaikan suatu soal yang berbentuk cerita atau pemecahan masalah. Misalnya tentang luas tanah seseorang dibandingkan dengan luas tanah orang lain. Demikian pula dengan umur seseorang berapa kalinya umur orang lain. Konsep persamaan dan pertidaksamaan berkembang dari konsep kesamaan dan ketidaksamaan pada system bilangan real, sehingga menyelesaikan suatu persamaan dan pertidaksamaan banyak menggunakan sifat-sifat kesamaan dan ketidaksamaan bilangan real.

A. PERSAMAAN LINEAR

Persaman adalah kalimat terbuka yang mengandung hubungan (relasi) sama dengan. Sedangkan persamaan linear adalah suatu persamaan yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah satu atau berderajat satu.

1. Persamaan Linear Satu Variabel

Persamaan linear satu variable adalah persamaan linear yang memiliki satu variabel saja.

Bentuk umum :

$$ax + b = 0; \quad a, b \in R,\ a \neq 0$$

a adalah koefisien dari variabel x dan b adalah konstanta

Contoh 6.1:

a. 4x + 8 = 0
b. 2x - 18 = 0

Kedua persamaan di atas akan bernilai benar jika variabelnya berturut-turut diganti dengan -2 dan 9.

2. Persamaan Linear Dua Variabel

Persamaan linear dua variabel adalah persamaan yang hanya memiliki dua variabel dan masing-masing berpangkat satu

Bentuk umum:

$$ax + by = c; \quad a, b, c \in R,\ a \neq 0,\ b \neq 0$$

a adalah koefisien dari variable x dan b adalah koefisien dari variable y sedangkan c adalah konstanta.

Contoh 6.2

Sebutkan masing-masing variabel dari persamaan linier dua variabel berikut

a. $6x - 3y = 9$ merupakan persamaan linear dua variabel yaitu variabel x dan variabel y

b. $3p + 3q = 18$ merupakan persamaan linear dua variabel yaitu variabel p dan variabel q

3. Sifat-Sifat Persamaan Linear

a. Nilai persamaan tidak berubah, jika :
   1) Kedua ruas ditambah atau dikurangi bilangan yang sama.
   2) Kedua ruas dikalikan atau dibagi bilangan yang sama.

b. Suatu persamaan jika dipindahkan ruas, maka :
   1) Penjumlahan berubah menjadi pengurangan dan sebaliknya.
   2) Perkalian berubah menjadi pembagian dan sebaliknya.

Contoh 6.3:

1. $\frac{1}{3}x + 3 = 12$

   $\Leftrightarrow \frac{1}{3}x + 3 - 3 = 12 - 3$ (kedua ruas dikurangi 3)

   $\Leftrightarrow \frac{1}{3}x = 9$

   $\Leftrightarrow \frac{1}{3}x \,.\, 3 = 9.3$ (kedua ruas dikali 3)

   $\Leftrightarrow x = 27$

2. 4x – 7 = 2x + 9

   $\Leftrightarrow$ 4x – 7 + 7 = 2x + 9 + 7 (kedua ruas ditambah 7)

   $\Leftrightarrow$ 4x = 2x + 16

   $\Leftrightarrow$ 4x – 2x = 2x – 2x + 16 (kedua ruas dikurangi 2x)

   $\Leftrightarrow$ 2x = 16

$\Leftrightarrow$ 2x . $\frac{1}{2}$ = 16 . $\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ x = 8

4. Himpunan Penyelesaian Persamaan Linear

Menentukan himpunan penyelesaian persamaan linear berarti mencari harga yang memenuhi untuk pengganti variabel pada persamaan linear yang bersangkutan.

Contoh 6.4:

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan linear

$$\frac{2x-1}{5} = \frac{x+1}{2}$$

Jawab:

$$\frac{2x-1}{5} = \frac{x+1}{2}$$

$\Leftrightarrow$ 2(2x- 1) = 5(x + 1)

$\Leftrightarrow$ 4x – 2 = 5x + 5

$\Leftrightarrow$ 4x – 5x = 2 + 5

$\Leftrightarrow$ -x = 7

$\Leftrightarrow$ x = -7

HP = {-7}

5. Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Bentuk Umum

$$\boxed{\begin{array}{c} ax + by = c \\ px + qy = r \end{array}}$$

a, b, c, p, q, r $\in R$

a, p = koefisien dari x

b, q = koefisien dari y

c, r = konstanta

x, y = variabel

1. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel
   Ada beberapa cara menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel, antara lain :

   a. Cara Grafik
      Langkah-langkahnya sebagai berikut :
      1) Gambarlah grafik garis lurus pada bidang koordinat.
      2) Tentukan titik potng kedua garis tersebut. Koordinat titik potong tersebut merupakan pasangan penyelesaian dari system persamaan yang dimaksud.

   b. Cara Eliminasi
      Langkah-langkahnya sebagai berikut :
      1) Menyamakan koefisien salah satu variabel dengan cara mengalikan dengan bilangan selain nol.
      2) Menjumlahkan atau mengurangkan ruas-ruas yang bersesuaian dari kedua persamaan linear yang baru tersebut.

Contoh 6.5:

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan :

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$ dengan cara eliminasi !

Jawab:

Eliminir y

$$\begin{array}{r|c|r} 5x+3y=19 & x2 & 10x+6y=38 \\ 2x+2y=10 & x2 & \underline{6x+6y=30} \; - \end{array}$$

4x = 8

x = 2

Eliminir x

$$\begin{array}{l|l|l} 5x+3y=19 & x2 & 10x+6y=38 \\ 2x+2y=10 & x5 & \underline{10x+10y=50} \ - \end{array}$$

-4y = -12

y = 3

Jadi HP = {(2,3)}

c. Cara Substitusi

Substitusi artinya mengganti. Langkah-langkahnya sebagai berikut :

1) Nyatakan salah satu variabel yang memuat variabel yang lain dari salah satu persamaan.
2) Substitusikan hasil dari langkah 1) ke persamaan yang lain.

Contoh 6.6:

Tentukan himpunan penyelesaian dari system persamaan :

$$\begin{cases} 4x-2y=12 \\ x+y=9 \end{cases}$$ dengan cara substitusi !

Jawab:

$4x-2y=12$ .... (1)

x + y = 9 ⇔ x = 9 – y ..... (2)

(2) substitusi ke (1)

4(9-y) – 2y = 12

⇔ 36 – 4y – 2y = 12

⇔ -6y = 12 - 36

⇔ -6y = -24

⇔ y = 4 .... (3)

(3) substitusi ke (2)

x = 9 – 4

x = 5

Jadi HP = {(5,4)} *Cara Gabungan (Eliminasi dan Substitusi)*

Contoh 6.7:

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan:

$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$ dengan cara gabungan antara eliminasi dan substitusi !

Jawab:

Eliminir y

$3x - y = 5$

$\underline{2x + y = 10}$ +

$5x = 15$

$x = 3$

x = 3 substitusi ke $3x - y = 5$

$\Leftrightarrow 3(3) - y = 5$

$\Leftrightarrow 9 - y = 5$

$\Leftrightarrow -y = 5 - 9$

$\Leftrightarrow -y = -4$

$y = 4$

Jadi HP = {(3,4)}

d. Cara Determinan

Determinan adalah suatu bilangan yang berkaitan dengan matriks bujur sangkar (persegi).

Untuk menyelesaikan dengan cara determinan dari bentuk persamaan :

$ax + by = c$

$px + qy = r$

diubah dalam susunan bilangan sebagai berikut dan diberi notasi : D, D_x, D_y.

Dengan : $D = \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}$ = aq – bp

$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ r & q \end{vmatrix}$ = cq – br

$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix}$ = ar – cp

Kemudian x dan y dapat ditentukan dengan :

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ dan } y = \frac{D_y}{D}$$

Contoh 6.8:

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$ dengan cara determinan !

Jawab:

$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ = 2.1 – 3.3 = 2 – 9 = -7

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ = 1.1 – 3.5 = 1 – 15 = -14

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ = 2.5 – 1.3 = 10 – 3 = 7

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{7}{-7} = -1$$

Jadi HP = {(2, -1)}

B. PERSAMAAN KUADRAT

Persamaan kuadrat adalah persamaan berderajat dua dalam x yang dinyatakan dengan :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0;\ a, b, c \in R\ ;\ a \neq 0}$$

a = koefisien dari x^2

b = koefisien dari x

c = konstanta

Contoh 6.9:

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$x^2 - 9 = 0$

1. Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Ada beberapa cara menyelesaikan persamaan kuadrat, antara lain :

a. Memfaktorkan

Contoh 6.10:

1) Selesaikan $x^2 - 5x + 6 = 0$!

Jawab:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0$ atau $x - 2 = 0$

$x = 3$ atau $x = 2$

Jadi HP = {3, 2}

2) Selesaikan $x^2 - 25 = 0$!

Jawab:

$x^2 - 25 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 5)(x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow x + 5 = 0$ atau $x - 5 = 0$

$x = -5$ atau $x = 5$

Jadi HP = {-5, 5}

b. Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Contoh 6.11:

1) Selesaikan $x^2 + 10x + 21 = 0$!

Jawab:

$x^2 + 10x + 21 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x = -21$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 = -21 + 25$

$(\frac{1}{2}$ koefisien $x)^2$

$\Leftrightarrow (x + 5)^2 = 4$

$\Leftrightarrow x + 5 = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$\Leftrightarrow x + 5 = 2$ atau $x + 5 = -2$

$x = -3$ atau $x = -7$

Jadi HP $= \{-3, -7\}$

2) Selesaikan $4x^2 + 8x + 3 = 0$!

Jawab:

$4x^2 + 8x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 8x = -3$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x = -\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = -\frac{3}{4} + 1$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x + 1 = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{2}$ atau $x + 1 = -\frac{1}{2}$

x = $-\frac{1}{2}$ atau x = $-\frac{3}{2}$

Jadi HP = $\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$

c. Dengan Rumus ABC

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh 6.12:

1) Selesaikan $x^2 + 6x - 16 = 0$!

Jawab:

a = 1, b = 6, c = -16

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$= \frac{-6 \pm 10}{2}$$

$x_1 = \frac{-6+10}{2} = \frac{4}{2} = 2$ atau $x_2 = \frac{-6-10}{2} = \frac{-16}{2} = -8$

Jadi HP = {2, -8}

2. Sifat-sifat Akar persamaan Kuadrat

Sifat-sifat akar persamaan kuadrat yang menyangkut banyaknya akar persamaan kuadrat, ditentukan oleh nilai diskriminannya yaitu $D = b^2 - 4ac$.

(i) $D > 0 \rightarrow$ kedua akar real dan berbeda

(ii) $D = 0 \rightarrow$ kedua akar sama (kembar)

(iii) $D < 0 \rightarrow$ Persamaan kuadrat tidak mempunyai akar nyata

Contoh 6.13:

Tentukan sifat-sifat akar persamaan berikut ini !

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$
2) $x^2 + 6x + 9 = 0$
3) $x^2 + 3x + 3 = 0$

Jawab:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$

   $a = 1, b = -4, c = 3$

   $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$

   $D > 0$, kedua akar real dan berbeda.

2) $x^2 + 6x + 9 = 0$

   $a = 1, b = 6, c = 9$

   $D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$

   $D = 0$, kedua akar sama (kembar)

3) $x^2 + 3x + 3 = 0$

   $a = 1, b = 3, c = 3$

   $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(1)(3) = 9 - 13 = -3$

   $D < 0$, persamaan tidak mempunyai akar nyata.

C. PERTIDAKSAMAAN LINEAR

Pertidaksamaan linear adalah suatu pertidaksamaan yang variabelnya paling tinggi berderajat satu.

Bentuk umum :

$$\boxed{ax + b \ (R)\ 0 \ ; \ a, b \in R, \ a \neq 0}$$

a = koefisien dari x

x = variabel

b = konstanta

(R) = salah satu relasi pertidakamaan ($<, >, \leq, \geq$)

Contoh 6.14:

$5x + 5 \geq 25$

$3x - 3 > 12$

$x + y \leq 8$

1. Sifat-sifat Pertidaksamaan

a. Arah tanda pertidaksaman tetapjika ruas kiri dan ruas kanan pertidaksamaan ditambah, dikurangi, dikalikan, atau dibagi dengan bilangan positif yang sama.

1) $a > b \rightarrow a + c > b + c$
2) $a > b \rightarrow a - d > b - d$
3) $a > b$ dan $c > 0 \rightarrow ac > bc$
4) $a > b$ dan $d > 0 \rightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{d}$

b. Arah tanda pertidaksamaan berubah jika ruas kiri dan ruas kanan dikalikan atau dibagi dengan bilangan negatif yang sama.

1) $a > b$ dan $c < 0 \rightarrow ac < bc$
2) $a > b$ dan $d < 0 \rightarrow \frac{a}{d} < \frac{b}{d}$

Contoh 6.15:

1) Selesaikan $6x + 2 < 4x + 10$!

Jawab:

$6x + 2 < 4x + 10$

$\Leftrightarrow 6x + 2 - 2 < 4x + 10 - 2$

$\Leftrightarrow 6x < 4x + 8$

$\Leftrightarrow 6x - 4x < 4x - 4x + 8$

$\Leftrightarrow 2x < 8$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.2x < \frac{1}{2}.8$

$x < 4$

2) Selesaikan $6x - 5 \geq 9x + 10$!

Jawab:

$6x - 5 \geq 9x + 10$

$\Leftrightarrow 6x - 5 + 5 \geq 9x + 10 + 5$

$\Leftrightarrow 6x \geq 9x + 15$

$\Leftrightarrow 6x - 9x \geq 9x - 9x + 15$

$\Leftrightarrow -3x \geq 15$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)(-3x) \leq \left(-\frac{1}{3}\right)(15)$

$x \leq 5$

2. Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Linear

Contoh 6.16:

a. Tentukan himpunan penyelesaian dari $6x + 4 \geq 4x + 20$, $x \in B$!

Jawab:

$6x + 4 \geq 4x + 20$

$\Leftrightarrow 6x + 4 - 4 \geq 4x + 20 - 4$

$\Leftrightarrow 6x \geq 4x + 16$

$\Leftrightarrow 6x - 4x \geq 4x - 4x + 16$

$\Leftrightarrow 2x \geq 16$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} .2x \geq \frac{1}{2} .16$

$x \geq 8$

8

Jadi HP = $\{ x \mid x \geq 8, x \in B\}$

b. Tentukan himpunan penyelesaian dari 5x + 10 > 8x + 4, $x \in R$!

Jawab:

5x + 10 > 8x + 4

$\Leftrightarrow$ 5x + 10 – 10 > 8x + 4 – 10

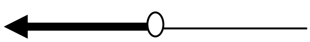
$\Leftrightarrow$ 5x > 8x – 6

$\Leftrightarrow$ 5x – 8x > 8x – 8x – 6

$\Leftrightarrow$ -3x > -6

$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)(-3x) < \left(-\frac{1}{3}\right)(-6)$

x < 2



Jadi HP ={ x | x < 2 , $x \in R$}

D. PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

Pertidaksamaan kuadrat adalah suatu pertidaksamaan yang mempunyai variabel paling tinggi berderajat dua dan koefisien variabel pangkat duanya tidak sama dengan nol.

Bentuk umum :

$$\boxed{ax^2 + bx + c\ (R)\ 0;\ a, b, c \in R\ ;\ a \neq 0}$$

a = koefisien dari x^2

b = koefisien dari x

c = konstanta

(R) = salah satu relasi pertidakamaan (<, >, ≤, ≥)

Contoh 6.17:

$x^2 + 5x + 6 \geq 0$

$x^2 - x - 6 < 0$

$2x^2 + 9x + 5 \leq 0$

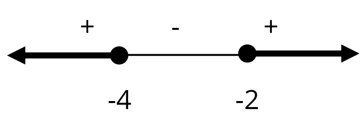
1. Sifat-sifat Pertidaksamaan Kuadrat
   Secara umum sifat-sifat pertidaksamaan kuadrat sama dengan sifat-sifat pertidaksamaan linear.

2. Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Kuadrat
   Langkah-langkah menentukan himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan kuadrat adalah sebagai berikut :
   (i) Ubah bentuk pertidaksamaan ke dalam bentuk umum.
   (ii) Tentukan pembuat nol ruas kiri.
   (iii) Letakkan pembuat nol pada garis bilangan.
   (iv) Substitusi sembarang bilangan pada pertidaksamaan kecuali pembuat nol.

   Jika benar, maka daerah yang memuat bilangan tersebut merupakan daerah penyelesaian.

   Contoh 6.18:

   1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 + 6x + 8 \geq 0$ untuk $x \in R$!
      Jawab:
      (i) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$
      (ii) Pembuat nol
      $x^2 + 6x + 8 = 0$
      $\Leftrightarrow (x + 4)(x + 2) = 0$
      $\Leftrightarrow x + 4 = 0$ atau $x + 2 = 0$
      $x = -4$ atau $x = -2$
      (iii) (B) (S) (B)



      (iv) Ambil $x = 0 \rightarrow x^2 + 6x + 8 \geq 0$
      $8 \geq 0$ (B)
      Jadi HP = $\{ x | x \leq -4 \text{ atau } x \geq -2 \}$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari $2x^2 + 3x - 5 < 0$ untuk $x \in R$!

Jawab:

$2x^2 + 3x - 5 < 0$

Pembuat nol

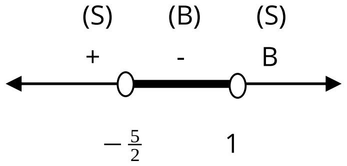
$2x^2 + 3x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (2x + 5)(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 5 = 0$ atau $x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x = -5$ atau $x = 1$

$x = -\frac{5}{2}$ atau $x = 1$



Ambil $x = 0 \rightarrow 2x^2 + 3x - 5 < 0$

$-5 < 0$ (B)

Jadi HP = $\{ x | -\frac{5}{2} < x < 1 \}$

E. APLIKASI PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINIER

Beberapa masalah dalam kehidupan sehari - hari dapat diselesaikan dengan konsep peramaan maupun dengan pertidaksamaan linier. Langkah pertama yang dilakukan adlah menterjemahkan masalah tersebut kedalam kalimat matematika. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh - contoh berikut.

Contoh 6.19:

1. Ahli kesehatan mengatakan bahwa akibat menghisab satu batang rokok waktu hidup seseorang akan

berkurang selama 5,5 menit. Berapa rokok yang dihisab Fahri tiap selama 275 hari(1 tahun = 360 hari).

Jawab:
misalkan banyaknya rokok yang dihisab tiap hari adalah x, maka waktu hidup berkurang tiap harinya 5,5 x menit.
Dalam setahun waktu hidup, berkurang banyak 5,5x $\times$ 360 hari. Dalam 20 tahun waktu hidup berkurang banyak 5,5x $\times$ 360 $\times$20 menit. Sehingga diperoleh persamaan :
5,5x $\times$ 360 20 = 275 $\times$ 60 $\times$ 24
39.600x = 396.000
x = <u>396.000/39.600</u>
x = 10
jadi, fahri menghisap rokok 10 batang setiap hari.

2. Upah seorang teknisi untuk memperbaiki suatu mesin bubut adalah Rp. 250.000,- ditambah biaya Rp. 75.000 tiap jamnya. Karena pekerjaanya kurang rapi, pembayaranya dip[otong 10% dari upah total yang harus diterima. Jika teknisi tersebut mendapat upah sebesar Rp. 798.750,- Berapa jam mesin bubut tersebut diperbaiki?

   Jawab:
   Misalkan teknisi bekerja selama x jam, dan upah yang diterima hanya (100 - 10)% =
   90%, maka diperoleh persamaan berikut:
   (75.000x + 250.000) X 90% = 798.750
   67.500x + 225.000 = 798.750
   67.500x = 798.750 – 225.000
   67.500x = 573.750

x = 573.750/67.500 = 8.5

Jadi, teknisi tersebut bekerja memperbaiki mesin selama 8,5 jam.

3. Untuk dapat diterima sebagai karyawan di PT.Teknik Sejahtera, calon karyawan akan menjalani tes sebanyak 4 kali, yaitu tes tertulis, psikotes, tes ketrampilan, dan wawancara dengan perbandingan hasil tes berturut-turut adalah 4 : 3 : 2 : 1. Total nilai tes tidak boleh kurang dari 827. Azam telah mengikuti tes dengan hasil sebagai berikut. Psikotes =80, tes ketrampilan =95, dan wawancara =85. Tentukan nilai terendah tes tertulisnya agar azam dapat diterima menjadi karyawan.

   Jawab :

   Misalkan nilai tes tertulis adalah x,maka diperoleh pertidaksamaan :

   $4x + 3 . 80 + 2 . 95 + 1 .85 \geq 827$

   $4x + 240 + 190 + 85 \geq 827$

   $4x \geq 827 - 240 - 190 - 85$

   $4x \geq 312$

   $x \geq 78$

   Jadi, nilai terendah tes tertulis azam adalah agar diterima sebagai karyawan adalah 78.

F. RANGKUMAN

1. Persamaan adalah kalimat terbuka yang mengandung hubungan (relasi) sama dengan.
   Bentuk umum persamaan linier:
   $ax + b = 0$; $a,b \in R$, $a \neq 0$
   a adalah koefisen dari variabel x dan b adalah konstanta

2. Sifat-sifat persamaan linier
   a. nilai persamaan tidak berubah, jika:
      - kedua ruas ditambahkan atau dikurangi bilangan yang sama
      - kedua ruas dikalikan atau dibagi bilangan yang sama

   b. suatu persamaan jika dipindahkan ruas, maka:
      - penjumlahan berubah menjadi pengurang, demikian pula sebaliknya
      - perkalian berubah menjadi pembagian dan sebaliknya

3. Ada beberapa cara menyelsaikan sistem persamaan linier dua variabel yaitu:
   a. Cara grafik
   b. Cara eliminasi
   c. Cara subtitusi
   d. Cara gabungan (eliminasi-subtitusi
   e. Cara determinan

4. Persamaan kuadrat adalah persamaan berderajat dua dalam x dinyatakan dengan: $ax^2 + bx + c = 0$; $a,b,c \in R$, $a \neq 0$

5. Cara menyelesaikan persamaan kuadrat, antara lain:
   a. Memfaktorkan

b. Melengkapkan kuadrat sempurna
c. Rumus ABC

6. Sifat-sifat akar persamaan kuadrat ditentukan oleh nilai diskriminannya yaitu $D = b^2 - 4ac$
   $D > 0 \rightarrow$ kedua akar real dan berbeda
   $D = 0 \rightarrow$ kedua akar sama (kembar)
   $D < 0 \rightarrow$ Persamaan kuadrat tidak mempunyai akar nyata

7. Sifat-sifat pertidaksamaan
   a. Arah tanda pertidaksamaan tetap jika ruas kiri dan ruas kanan pertidaksamaan ditambah, dikurangi, dikalikan dan dibagi dengan bilangan positif yang sama
   b. Arah tanda pertidaksamaan berubah jika ruas kiri dan ruas kanan dikalikan dan dibagi dengan bilangan negatif yang sama.

G. LATIHAN

1. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan linear berikut !
   a. $5 + 3(2 - x) + 2 = 2(x - 3)$
   b. $8x - 3 = 4(x + 1) + 5$

2. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan linear berikut !
   a. $\frac{3x}{5} - 2 = \frac{x}{3}$
   b. $\frac{x}{3} + \frac{3x}{4} = x + 2$
   c. $\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}x = \frac{2x-3}{4}$

3. Tentukan penyelesaian soal-soal berikut !
   a. $6x + 3 \geq -2x + 1$
   b. $x + 2 > \frac{1}{2}(x + 1)$
   c. $\frac{x-1}{2} - 1 \leq 3$

4. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan kuadrat berikut dengan menggunakan pemfaktoran!
   a. $x^2 - 5x - 36 = 0$ b. $x^2 - 13x + 22 = 0$

5. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan kuadrat berikut dengan melengkapkan kuadrat sempurna!
   a. $x^2 + 5x + 4 = 0$ b. $x^2 - 11x + 24 = 0$

6. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan kuadrat berikut dengan menggunakan rumus abc !

   a. $x^2 - 4x - 45 = 0$ b. . $x^2 + 2x - \frac{3}{4} = 0$

7. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan kuadrat berikut dari $x^2 + 4x - 60 = 0$!

8. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 5x - 36 = 0$, tentukan x_1 dan x_2 !

9. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat berikut !

   a. $x^2 - 2x - 8 < 0$ d. $x^2 - 5x < 0$ g. $x^2 - x - 2 < 0$

   b. $x^2 - 3x \geq 0$ e. $x^2 - \frac{3}{2}x + 1 > 0$ h. $\frac{x}{x+4} \leq x - 1$

   c. $x^2 - 10x + 21 < 0$ f. $x^2 + x - 12 \geq 0$

10. Suatu persegi panjang memiliki ukuran panjang (4x + 2) cm dan lebar (x + 1) cm.
    a. Tentukan keliling persegi panjang
    b. Jika kelilingnya 66 cm, tentukan x.
    c. Tentukan panjang dan lebarnya
    d. Tentukan luas persegi panjang tersebut.

11. Dua kali suatu bilangan jika ditambah dengan lima hasilnya sama dengan 27. Tuliskan kalimat matematikanya.

12. Usman memiliki uang Rp 3.800,00 lebih banyak dari uang Adi. Jika jumlah uang mereka Rp 10.200,00 maka banyak uang Usman adalah…

13. Bastian berusia 3 tahun lebih tua dari Diah. Jumlah usia mereka kurang dari 15 tahun, usia Diah sekarang adalah…..

14. Lebar sebuah persegi panjang lebih pendek 4 cm dari panjangnya. Jika keliling nya sama dengan 72 cm, panjang persegi panjang adalah

15. Sebuah kawat yang panjangnya tidak lebih dari 72 cm dibuat kerangka balok dengan kedua ujung kerangka balok tersebut berbentuk persegi. Panjang balok lebih 6 cm dari pada lebarnya. Maka tentukan panjang, lebar dan tinggi balok tersebut?

16. Ukuran panjang lapangan tenis 16 m lebihnya daripada lebar lapangan tersebut. Apabila luas lapangan tenis 225 m^2, berapakah ukuran panjang dan lebar lapangan tenis tersebut?

17. Untuk dapat diterima sabagai suster di RS SEHAT, seorang calon suster akan menjalani tes sebanyak 4 kali, yaitu tes tertulis, psikotes, tes keterampilan dan wawancara dengan perbandingan hasil tes berturut-turut 3 : 2 : 4 : 1 dan total tes tidak boleh kurang dari 793. Windy adalah salah seorang calon suster yang telah mengikuti tes dengan hasil sebagai berikut: tes tertulis = 75, psikotes = 78, dan nilai wawancara = 92. Tentukan nilai terendah tes keterampilan agar ia diterima di rumah sakit tersebut.

18. Dua bilangan mempunyai selisih 495. Jika yang satu dibagi yang lain, maka hasilnya 4 dengan sisa 6. Bilangan-bilangan yang manakah itu?

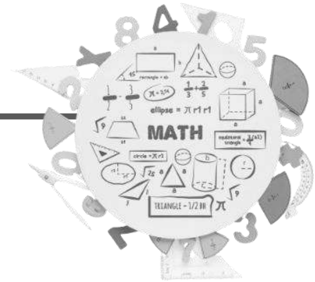
19. Empat kali ukuran tinggi suatu jajar genjang sama dengan 3 kali ukuran alasnya dikurangi 9 cm. jika alas ditambah 4 dan tingginya dikurangi 2 cm, maka luas daerahnya berkurang 6 cm. Berapakah tinggi jajar genjang tersebut?

20. Dalam suatu kelas terdapat anak laki-laki dan anak perempuan. Jika ada 4 anak laki-laki masuk dan 5 anak

perempuan masuk maka rasio banyaknya anak laki-laki dan anak perempuan adalah 3:4. Jika ada 3 anak laki-laki dan 2 anak perempuan keluar, maka rasio banyaknya anak laki-laki dan anak perempuan menjadi 2 : 3. Berapa banyaknya anak laki-laki dan anak perempuan?

21. Beni memiliki sejumlah uang logam. Uang tersebut disusun dalam suatu jajaran. Jika banyaknya uang logam pada tiap baris dikurangi 2, maka banyanya baris bertambah 2. Jika pada tiap baris ditambahkan 4 uang logam, maka banyaknya baris berkurang 3. Berapa banyaknya uamg logam tersebut?

BAB 7



TRIGONOMETRI PENDAHULUAN

Trigonometri adalah cabang matematika yang mempelajari hubungan yang meliputi panjang dan sudut segitiga. Trigonometri berasal dari bahasa Yunani yaitu trigonom = tiga sudut dan metron adalah mengukur. Dari dua kata tersebut, trigonometri dapat diartikan cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang perbandingan ukuran sisi siatu segitiga apabila ditinjau dari salah satu sudut yang terdapat pada segitiga tersebut. Dalam mempelajari perbandingan sisi-sisi segitiga pada trigonometri, maka segitiga mempunyai satu tepat sudutnya 90^0 artinya segitiga itu tidak lain adalah segitiga siku-siku. Jadi, konsep dasar dari trigonometri adalah sudut dan segitiga siku-siku. Awal trigonometri pada zaman Mesir kuno dan Babilonia. Matematikawan India adalah perintis perhitungan variabel aljabar yang digunakan untuk menghitung astronomi. Aplikasi trigonometri banyak kita temukan dalam kehidupan sehari-sehari terutama yang bergerak di bidang ilmu astronomi yang digunakan untuk menghitung jarak ke bintang-bintang terdekat, navigasi satelit, geografi, teknik dan sebagainya.

Trigonometri merupakan suatu metode dalam perhitungan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perbandingan-perbandingan pada bangun geometri, khususnya bangun yang berbentuk segitiga. Selain itu, trigonometri bermanfaat untuk menghitung ketinggian suatu tempat tanpa mengukur secara langsung sehingga bersifat lebih praktis dan efesien.

Pada bab 6 memuat materi tentang perbandingan trigonometri, penentuan nilai perbandingan trigonometri diberbagai kuadran, penggunaan aturan sinus dan cosinus, rumus luas segitiga, dan identitas trigonometri

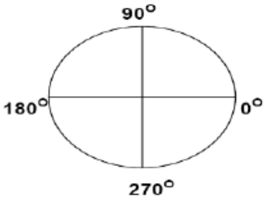
A. PENGERTIAN TRIGONOMETRI

Trigonometri merupakan ilmu ukur segitiga atau pengukuran segitiga yang memperlajari sudut, dan sisi-sisi segitiga (segitiga siku-siku). Jadi trigonometri merupakan nilai perbandingan yang dikaitkan dengan sebuah sudut. Perbandingan tersebut meliputi sin (sinus), cos (cosinus), tan (tangen), cosec (cosecant), sec(secan) dan cotan (cotangent).

Pada umumnya, ada dua ukuran untuk menyatakan besaran sudut yaitu derajat dan radian. Tanda “^{0}” dan “rad” berturut –turut merupakan simbol dari derajat dan radian.

B. SATUAN SUDUT

- **Derajat**



Apabila satu lingkaran penuh dibagi 360 bagian yang sama, maka setiap bagian disebut satu derajat. Satu derajat didefinisikan sebagai sudut yang besarnya 1/360 keliling lingkaran. Satu derajat dapat dibagi menjadi 60 bagian yang sama besar yang disebut satu menit, dan satu menit dapat diab gi menjadi 60 bagian sama besar yang disebut detik.

- **Radian**

  Satu radian adalah besarnya sudut dalam lingkaran yang panjang busur di depannya sama dengan jari-jarinya. Atau ukuran sudut pusat α yang panjang busurnya sama dengan jari-jarinya. Apabila keliling lingkaran K dan jari-jarinya r, maka K = $2\pi r$, sehingga besar sudut satu keliling lingkaran adalah 2π radian. Jadi konversi derajat dan radian adalah:

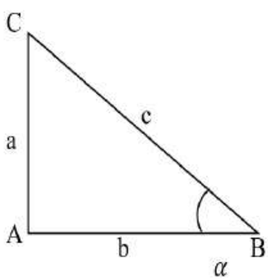
  2π radian = 360^0

  π radian = 180^0

C. PERBANDINGAN TRIGONOMETRI

Perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku:

Perhatikan gambar berikut:



Sin $\alpha = \frac{a}{c}$ ➔ Sin = depan/miring

Cos $\alpha = \frac{b}{c}$ ➔ Cos = Samping/miring

Tan $\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$ ➔ tan = depan/samping

Cosec $\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{c}{a}$

Sec $\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b}$

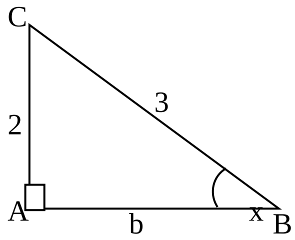
Cotan $\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$

Contoh 7.1:

Jika $\sin x = \frac{2}{3}$, tentukan nilai dari $\cos^2 x + \tan^2 x$!

Penyelesaian:

Karena $\sin x = \frac{2}{3}$ maka dapat digambarkan sebagai berikut:



Berdasarkan teorema Pythagoras diperoleh:

$AB^2 = BC^2 - AC^2$

$AB^2 = 3^2 - 2^2$

$AB^2 = 5$

$AB = \sqrt{5}$

Akibatnya:

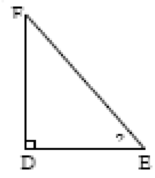
$\text{Cos } x = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ dan $\tan x = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Jadi $\cos^2 x + \tan^2 x = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{5}{9} + \frac{4}{5} = \frac{61}{45}$

Contoh 7.2:

Tentukan nilai sin ∝, cos ∝ dan tan ∝ dari segitiga dberikut: jika DE = 6 cm dan DF = 8 cm

penyelesain:



Pandang △ DEF yang salah satu sudutnya siku-siku sehingga berlaku dalil Pythagoras

$EF^2 = DE^2 + DF^2$

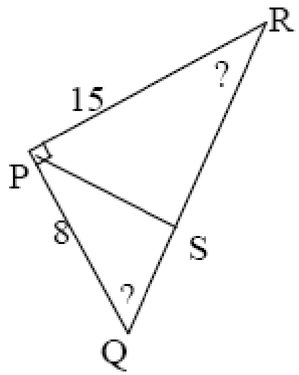
$EF^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

$EF = \sqrt{100} = 10$ cm.

Jadi, $\sin \propto = \frac{DF}{EF} = \frac{8}{10}, \cos \propto = \frac{DE}{EF} = \frac{6}{10},\ tan \propto = \frac{DF}{DE} = \frac{8}{6}$

Contoh 7.3:

Perhatikan segitiga berikut:



Tentukan panjang SR, QS dan SP!

Penyelesaian:

$QR^2 = PQ^2 + PR^2$

$QR^2 = 15^2 + 8^2$

$QR^2 = 289$

QR = 17

Perhatikan $\Delta\ PQR: cos? = \frac{PR}{QR} = \frac{15}{17}$ dan $\Delta PSR: \cos? = \frac{SR}{15}$

Nilai cos ? dari $\Delta\ PQR$ = nilai cos ? dari ΔPSR (besar sudut sama besar)

Sehingga diperoleh:

$\frac{PR}{QR} = \frac{SR}{15} \Longrightarrow \frac{15}{17} = \frac{SR}{15}$

$17. SR = 15.15$

$SR = \frac{225}{17} = 13\frac{4}{17}$

Untuk QS ➔ QR = QS + SR sehingga

QS = QR – SR = 17 - 13 $\frac{4}{17}$ = 3 $\frac{13}{17}$

Untuk PS ➔ Perhatikan : $\Delta PQR = \sin? = \frac{PQ}{QR} = \frac{8}{17}$ dan $\Delta PSR = \sin? = \frac{PS}{PR} = \frac{PS}{15}$

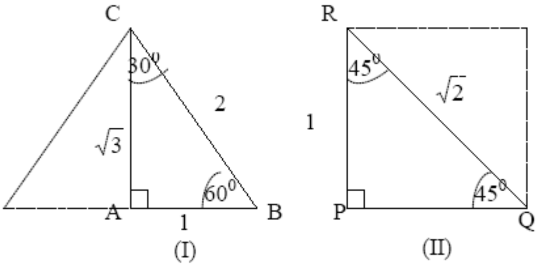
Sehingga diperoleh: $\frac{PQ}{QR} = \frac{PS}{PR}$ ➔ $\frac{8}{17} = \frac{PS}{15}$

$17.PS = 8\ x\ 15$

$PS = \frac{120}{17} = 7\frac{1}{17}$

D. NILAI TRIGONOMETRI SUDUT ISTIMEWA

Sudut istimewa pada trigonometri adalah sudut-sudut yang besarnya 0, 30, 45, 60 dan 90 derajat. Untuk mencari nilai sinus, cosinus dan tangen. Perhatikan gambar segitiga berikut:



<u>Pada segitiga I</u>

$\sin 30^0 = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$; $sin60^0 = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos 60^0 = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$; $cos30^0 = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

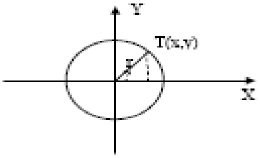
$tan\ 30^0 = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\tan 60^0 = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

<u>Pada segitiga II</u>

$\sin 45^0 = \frac{PQ}{QR} = \frac{PR}{QR} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

$\cos 45^0 = \frac{PR}{RQ} = \frac{PQ}{QR} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

$tan\ 45^0 = \frac{PQ}{PR} = \frac{RP}{QP} = 1$



Untuk sudut 0 dan sudut 90 dari sinus, cosinu dan tangen, perhatikan gambar berikut:

Misalkan suatu lingkaran berpusat

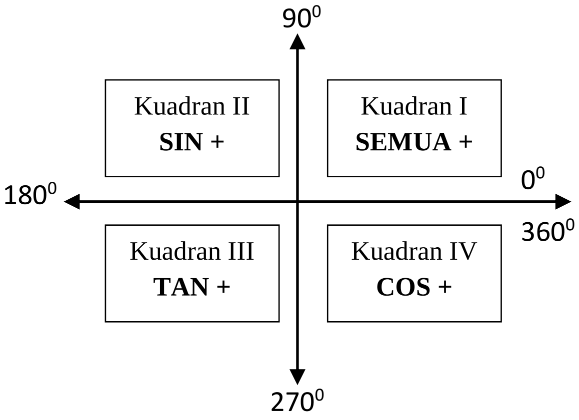
di titik (0,0) dan berjari-jari r satuan. Ambil suatu titik pada lingkaran yaitu titik T(x,y).

pada gambar didapat nilai sin ? = $\frac{y}{r}$; cos? $= \frac{x}{r}$; tan? $= \frac{y}{x}$. Sudut 0 terjadi jika titik T berimpit dengan sumbu x sehingga sin 0^0 = $\frac{0}{r} = 0; \cos 0^0 = \frac{r}{r} = 1 ; \tan 0^0 = \frac{0}{x} = 0$. Sedangkan sudut siku-siku atau 90^0 terjadi jika titik T berimpit dengan sumbu y sehingga di peroleh: sin 90^0 = 1, cos 90^0 = 0 dan tan 90^0 tak terdefinisi (tidak mempunyai nilai. Berikut tabel sudut-sudut istimewa

	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
Sin ∝	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Cos ∝	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan ∝	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Tidak terdefinisi

E. PERBANDINGAN TRIGONOMETRI DI BERBAGAI KUADRAN

Sistem kuadran pada bidang cartesius terbagi menjadi 4 bagian yang ditetapkan yaitu: Kuadran II: daerah yang dibatasi oleh sumbu x positif dan sumbu y positif; kuadran II: daerah yang dibatasi oleh sumbu x negatif dengan sumbu y positif, kuadran III: daerah yang dibatasi oleh sumbu x negatif dan sumbu y negatif, dan kaudran IV: daerah yang dibatasi oleh sumbu x positif dan sumbu y negatif. Perbandingan trigonometri pada kuadran dapat digambarkan sebagai berikut:



Contoh 7.4:

Nilai dari $\frac{\sin 30^0 + \cos 60^0}{sec^2 45} = \cdots$

Penyelesaian:

Ingat: $\sec 45^0 = \frac{1}{\cos 45^0} = \sqrt{2}$

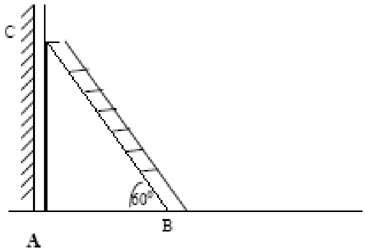
Sehingga diperoleh $\frac{\sin 30^0 + \cos 60^0}{sec^2 45} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$

Contoh 7.5:

Sebuah tangga disandarkan pada suatu tembok. Sudut yang dibentuk oleh tangga tersebut dengan lantai adalah 60^0. Jika jarak kaki tangga ke tembok adalah 6 m. Hitunglah:

a. Panjang tangga tersebut
b. Tinggi tembok dari ujung tangga ke lantai
c. Misal sudut antara tangga dan lantai adalah $\propto$, tentukan nilai $\propto$ apabila panjang tangga $6\sqrt{2}$

Penyelesaian:



Perhatikan segitiga ABC yang siku-siku di A. BC adalah panjang tangga dan AC adalah tinggi tembok.

a. Menurut perbandingan cosinus

   $\cos 60^0 = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{BC}$

   Cos 60^0 . BC = 6

   $\frac{1}{2}$. BC = 6

   BC = 12 m

   Jadi panjang tangga adalah 12 m

b. Menurut perbandingan tangen

   $\tan 60^0 = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{6}$

   Tan 60^0.6 = AC

   $\sqrt{3}$ .6 = AC

   Jadi tinggi tembok dari ujung tangga ke lantai = $6\sqrt{3}$ m

c. Menurut perbandingan cosinus

   $\cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Jadi besar α = 45^0

F. IDENTITAS TRIGONOMETRI

Identitas terigonometri merupakan pernyataan yang memuat kesamaan dua bentuk untuk setiap pengantian variabelnya dengan nilai di mana bentuk tersebut didefinisikan. Untuk membuktikan identitas trigonometri digunakan subtitusi trigonometri dan manipulasi aljabar dengan tujuan mengubah bentuk trigonometri menjadi lebih sederhana. Dalam membuktikan identitas trigonometri dengan menyelesaikan masing-masing ruas secara terpisah.

Berikut rumus identitas trigonometri:

$csc\ \theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$cot\ \theta = \frac{1}{\tan\theta}$
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$cos^2\ \theta + sin^2\theta = 1$
$1 + tan^2\theta = sec^2\theta$	$1 + cot^2\theta = csc^2\theta$	

Contoh 7.6:

Butkikan bahwa $\sin\theta\cot\theta = \cos\theta$

Penyelesaian:

$\sin\theta\cot\theta = \sin\theta\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\sin\theta\cot\theta = \cos\theta$ terbukti

Contoh 7.7:

Buktikan bahwa $\tan x + \cos x = \sin x\ (\sec x + \cot x)$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}\sin x\ (\sec x + \cot x) &= \sin x \sec x + \sin x \cot x \\ &= \sin x\ \frac{1}{\cos x} + \sin x\ \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \tan x + \cos x\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\tan x + \cos x = \sin x\ (\sec x + \cot x)$

Contoh 7.8:

Buktikan identitas trigonometri dari $\frac{1}{tan^2x}\left(\frac{1}{cos^2x} - 1\right) = 1$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\frac{1}{tan^2x}\left(\frac{1}{cos^2x} - 1\right) &= \frac{cos^2x}{sin^2x}(\frac{1 - cos^2x}{cos^2x}) \\ &= \left(\frac{cos^2x}{sin^2x}\right)\left(\frac{sin^2x}{cos^2x}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

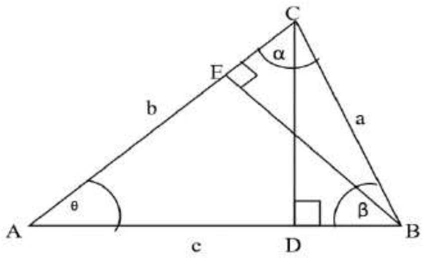
Dalam membuktikan identitas trigonometri:

1. Manipulasi ruas persamaan yang lebih rumit terlebih dahulu
2. Carilah bentuk yang dapat disubtitusi dengan bentuk trigonometri yang ada dalam identitas trigonometri sehingga diperoleh bentuk sederhana
3. Perhatikan operasi-operasi aljabar dalam penerapannya
4. Jika kita tidak tahu apa yang harus dilakukan, ubahlah bentuk trigonometri menjadi bentuk sinus dan cosinus (mungkin dapat membantu dalam menyelesaikan identitas trigonometri)
5. Selalu perhatikan ruas persamaan yang tidak kita manipulasi untuk memastikan langkah-langkah yang kita lakukan menunju bentuk ruas tersebut.

G. ATURAN SINUS DAN COSINUS

Mencari rumus Sinus

Perhatikan gambar segitga ABC berikut:



Misalkan ΔABC adalah segitiga dengan $\angle CAB = \alpha, \angle ABC = \theta\ dan\ \angle BCA = \beta$ serta panjang BC, AC dan AB berturut-turut adalah a, b dan c. tarik garis melalui titik C di luar garis AB tegak lurus garis tersebut misalkan $\overline{CD}$.

$\sin A = \frac{CD}{AC} \rightarrow CD = AC.\sin A$ diperoleh CD = b sin A ....(1)

$\sin B = \frac{CD}{BC} \rightarrow CD = BC.\sin B$ diperoleh CD = a sin B ....(2)

Dari (1) dan (2) di dapat:

b sin A = a sin B ➔ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ....(3)

Tarik garis melalui titik B diluar garis AC tegak lurus garis tersebut, misalkan $\overline{BE}$

$\sin A = \frac{BE}{AB} \rightarrow BE = AB.\sin A$ diperoleh BE = c sin A ....(4)

$\sin C = \frac{BE}{BC} \rightarrow BE = BC.\sin C$ diperoleh BE = a sin C ....(5)

Dari (4) dan (5) di dapat:

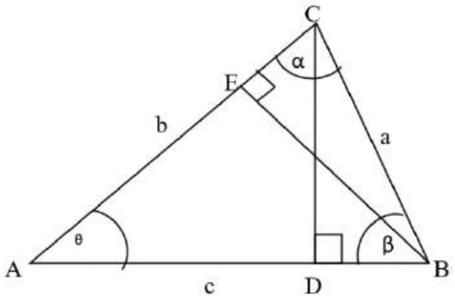
$c \sin A = a \sin C \ \rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ .... (6)

Dari (3) dan (6) diperoleh:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{a}{\sin \theta} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \alpha}$ disebut rumus sinus / aturan sinus

Mencari rumus cosinus

Perhatikan segitiga berikut:



$\sin A = \frac{CD}{AC} \to CD = b \sin A$ .... (1)

$\cos A = \frac{AD}{AC} \to AD = b \cos A$

BD = AB – AD = c – b cos A .... (2)

Perhatikan sudut BDC siku-siku di D, maka berlaku teorema Pythagoras:

$BC^2 = BD^2 + CD^2$

$a^2 = (c - b \cos A)^2 + (b \sin A)^2$

$a^2 = c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A + b^2 \cos^2 A + b^2 \sin^2 A$

$a^2 = c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A + b^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A$

dengan cara yang sama, akan diperoleh rumus cosinus yang lain yaitu:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

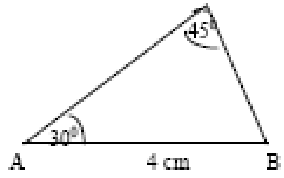
$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos C$

Buktikan!

Contoh 7.9:

Diketahui segitiga ABC dengan AB = 4 cm, $\angle CAB$ = 30^0 dan $\angle BCA$ $45^{0.}$ Tentukan panjang BC?

Penyelesaian:



Berdasarkan aturan sinus:

$\frac{BC}{\sin 30^0} = \frac{AB}{\sin 45^0}$

$\frac{BC}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2}. BC = \frac{1}{2}. 4$

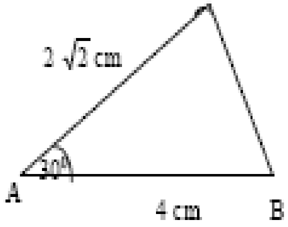
$BC = 2\sqrt{2}$

Jadi panjang BC = $2\sqrt{2}$ cm.

Contoh 7.10:

Diketahui segitiga ABC dengan AB = 4 cm dan AC = $2\sqrt{2}$ cm dan $\angle CAB$ = 30^0. Tentukan panjang BC!

Penyelesaian:



Berdasarkan aturan cosinus:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2$ bc cos A

$a^2 = (2\sqrt{2})^2 + 4^2 - 2(2\sqrt{2})(4)$ cos 30^0

$a^2 = 8 + 16 - 16\sqrt{2}(\frac{1}{2}\sqrt{3})$

$a^2 = 24 - 8\sqrt{6}$

a = $\sqrt{24 - 8\sqrt{6}} = 2\sqrt{6 - 2\sqrt{6}}$ cm

jadi panjang BC = $2\sqrt{6 - 2\sqrt{6}}$ cm

Contoh 7.11

diketahui segitiga PQR dengan $\angle PQR$ = 60^0, $PQ = \frac{3}{4}\sqrt{6}$ dan $PR = \frac{9}{4}$ cm. Tentukan besar sudut PRQ dan RPQ!

Penyelesaian:

$\frac{PR}{\sin 60} = \frac{PQ}{\sin \angle PRQ} \rightarrow \frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{6}}{\sin \angle PRQ}$

$\frac{9}{4}. \sin \angle PRQ = \frac{3}{4}\sqrt{6}\ x\ \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{8}\sqrt{18}$

$\sin \angle PRQ = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 45^0$

Jadi besar sudut PQR adalah 45^0 sedangkan besar sudut RPQ = 180 – (65 + 45) = 70^0

H. LUAS SEGITIGA

Luas segitiga adalah banyaknya satuan luas yang tepat menutupi permukaan segitiga tersebut. Rumus luas segitiga, ada tiga cara yaitu:

1. Luas segitiga = ½ x alas x tinggi (jika alas dan tinggi pada alas diketahui).

2. Luas segitiga dengan menggunakan perbandingan trigonometri

   Aturan sinus: Jika diketahui satu sudut dan diapit dua sisi

   $Luas\ \Delta\ \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{a.\,b\,sin\,C}$

   $Luas\ \Delta\ \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{a.\,c\,sin\,B}$

   $Luas\ \Delta\ \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{b.\,c\,sin\,A}$

   Jika diketahui satu sisi diapit dua sudut

   $Luas\ \Delta\ \mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{a}^2 \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}}{2 \sin(\mathrm{B}+\mathrm{C})}$

   $Luas\ \Delta\ \mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{b}^2 \sin \mathrm{A} \sin \mathrm{C}}{2 \sin(\mathrm{A}+\mathrm{C})}$

   $Luas\ \Delta\ \mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{c}^2 \sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B}}{2 \sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})}$

3. Jika diketahui tiga sisi

   Luas $\Delta\ \mathrm{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ dimana $s = \frac{a+b+c}{2}$

Contoh 7.12:

Diketahui segitiga ABC dengan AC = BC = 6 cm dan sudut BAC = 135^0. Tentukan luas segitiga ABC!

Penyelesaian:

Karena diketahui satu sudut diapit dua sisi maka digunakan aturan sinus

Luas $\Delta\ \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{AC.BC}\sin\angle\mathrm{BAC}$

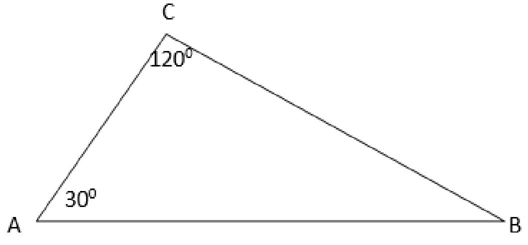
Luas $\Delta\ \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}.6.6\sin 135$

Luas $\Delta\ \mathrm{ABC} = 18.\frac{1}{2}\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

Contoh 6.13:

Diketahui segitiga ABC dengan panjang sisi AB = 6 cm dan besar sudut A = 30^0 dan sudut C = 120^0. Tentukan luas segitiga ABC!

Penyelesaian:



$\angle B$ = 30^0

Sehingga:

$Luas = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C} = \frac{6^2 sin30^0 \sin 30^0}{2 \sin 120^0} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$ cm

I. RANGKUMAN

1. Perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku

   Sin α = $\frac{sisi\ depan\ sudut}{sisi\ miring}$

   $\cos\alpha = \frac{sisi\ samping\ sudut}{sisi\ miring}$

   $\tan\alpha = \frac{sisi\ depan\ sudut}{sisi\ samping\ sudut}$

   $cosec\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

   $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

   $cotan\ \alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

2. Identitas Trigonometri

   $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

   $\tan^2 A - \sec^2 A = 1$

   $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

   $cotan\ A = \frac{\cos A}{\sin A}$

   $cosec\ A = \frac{1}{\sin A}$

   $\sec A = \frac{1}{\cos A}$

3. Aturan Cosinus

   $a^2 = b^2 + c^2 – 2bc$ Cos A

   $b^2 = a^2 + c^2 – 2ac \cos B$

   $c^2 = a^2 + b^2 – 2bc \cos C$

4. Luas Segitiga

   Luas segitiga dengan menggunakan perbandingan trigonometri

Aturan sinus: Jika diketahui satu sudut dan diapit dua sisi

$Luas\ \Delta\ \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{a.\,b\,sin\,C}$

$Luas\ \Delta\ \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{a.\,c\,sin\,B}$

$Luas\ \Delta\ \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{b.\,c\,sin\,A}$

Jika diketahui satu sisi diapit dua sudut

$Luas\ \Delta\ \mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{a}^2 \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}}{2 \sin(\mathrm{B}+\mathrm{C})}$

$Luas\ \Delta\ \mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{b}^2 \sin \mathrm{A} \sin \mathrm{C}}{2 \sin(\mathrm{A}+\mathrm{C})}$

$Luas\ \Delta\ \mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{c}^2 \sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B}}{2 \sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})}$

Jika diketahui tiga sisi

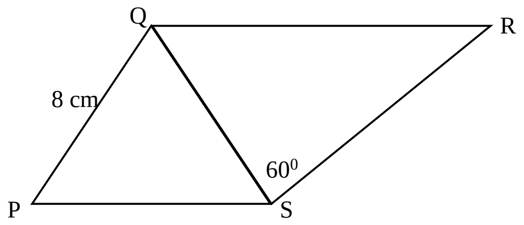
Luas $\Delta\ \mathrm{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ dimana $s = \frac{a+b+c}{2}$

J. LATIHAN

1. Jika $\sin x = \frac{2}{3}$. Tentukanlah nilai dari $\cos^2 x + \tan^2 x$!

2. Jika nilai dari $\sin A = \sqrt{2pq}$ dan $\tan A = \frac{\sqrt{2pq}}{p-q}$. Berapakah $p^2 = q^2$?

3. Perhatikan gambar berikut:



   Tentukan panjang QR!

4. Sebuah tangga yang panjangnya 2 m disandarkan ke bagian paling atas sebuah tembok. Tangga tersebut membentuk sudut α terhadap tanah. Jika tinggi tembok $\sqrt{3}$ m, berapakah besar sudut α?

5. Buktikan bahwa $3\sin^2 x - 2\cos^2 x = 5\sin^2 x - 2$

6. Jika $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$, berapakah nilai dari $\sin^3 x + \cos^3 x$

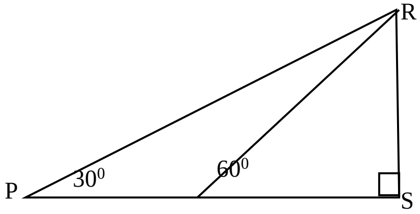
7. Buktikan $\frac{1-\sin x}{cos^2 x} = \frac{1}{1+\sin x}$

8. Buktikan bahwa $\frac{2\tan x}{1+tan^2 x} = 2\sin x\cos x$

9. Jika x_1 dan x_2 memenuhi $12\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ maka berapakah $\sec^2 x_1 + \sec^2 x_2$?

10. Buktikan bahwa $\frac{2\sin x\cos x - \cos x}{1-\sin x + sin^2 x - cos^2 x} = cotan\ x$

11. Pada gambar berikut, jika PQ = $10\sqrt{3}$, berapakah nilai PS?

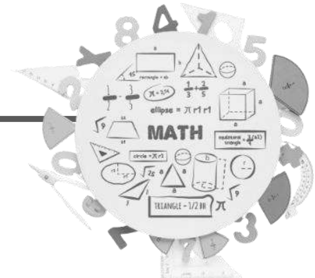


12. Dalam ΔABC, jika AB = 3, AC = 4 dan $\angle BAC = 60^0$, tentukanlah nilai dari $\tan \angle ABC$

13. Diketahui segitiga ABC dengan AB = 4 cm, AC = 6 cm dan BC = 8 cm dan $\angle ABC = \alpha$. Berapakah nilai $\cos \alpha$?

14. Diketahui ABCD dengan P dan Q masing-masing terletak pada BC dan CD sehingga 5 BP = PC dan jika sudut PAQ = α. Berapakah nilai dari $\cos \alpha$?

15. Buktikan identitas trigonometri dari (1 + $\tan^2$x)(1 + $\cot$an^{2}x) = $\sec^2$x. cosec^{2}x!



DAFTAR PUSTAKA

Alimuddin. (2012). *Proses Berpikir Kreatif Mahasiswa Calon Guru Kreatif dalam Pemecahan Masalah Matematika Berdasarkan Gender*. Disertasi Tidak diterbitkan Surabaya: PPs. Universitas Negeri Surabaya

Bahar. (2013). *Investigasi Karakteristik Kesalahan Siswa SMK dalam Pemecahan Soal Cerita Program Linier Ditinjau dari Kemampuan Awal*. Tesis Tidak diterbitkan. Makassar: PPs UNM.

Dwijono, Djoni dan Soesianto. F. (2006). *Logika Matematika untuk Ilmu Komputer.* Yogyakarta: Andi Yoyakarta

Kemendikbud. (2013). *Matematika Kelas X kurikulum 2013*. Jakarta: Politeknik negeri media kreatif.

Kemendikbud. (2014). *Matematika Kelas VII semester 1 kurikulum 2013 Edisi Revisi*. Jakarta: Pusat kurikulum dan Perbukuan, Balitban

KBBI online (2012). *Kamus Besar Bahasa Indonesia.* [online] tersedia pada www.pusatbahasa.diknas.go.id/**kbbi**/

Prihandoko, Antonius Cahya. (2005). *Memahami Konsep Matematika Secara Benar dan Menyajikannya dengan Menarik*. [pdf] Departemen Pendidikan Nasional, Dirjen Dikti.

Ruseffendi, E.T. (1997). *Materi Pokok Pendidikan Matematika 3*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Seputro, Thresia. (1992). *Pengantar Dasar Matematika; Logika dan Himpunan*. Jakarta: Erlangga

Siang, Jomg Jek. (2014). *Logika Matematika*. Yogyakarta: Andi Ofset

Siswanto (2013). *Matematika untuk kelas X SMA dan MA Program Wajib*. Solo: Global

Sri Handoko B dan Johannes. H (1974). *Pengantar Matematika untuk Ekonomi.* Jakarta: LP3ES

Soedjadi, R. (2000) *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia*. Jakarta: Dirjen Dikti, Departemen Pendidikan Nasional.

Soekisno, Aryan. R.B. (2010). *Persamaan dan Pertidaksamaan Linier.* Jakarta: Reka

Sukirman dkk. (2007). *Matematika*. Jakarta: Universitas Terbuka

Purcell, E.J. dan Varberg, D. (1996). *Kalkulus dan Geometri Analitis.* Jakarta: Erlangga.

R. Johnsonbaugh, *Matematika Diskrit Jilid 1*, Prenhallindo, 1998

Ruseffendi, E.T. (1984). *Dasar-dasar Matematika Modern untuk Guru.* Bandung: Tarsito.

Upu, Hamzah. 2004. *Problem Possing dan Problem Solving dalam Pembelajaran Matematika*. Bandung: Pustaka Ramadan.

Yahya Yusuf, dkk. (2014). *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi.* Jakarta: Ghalia Indonesia